

פתרונות למבחנים

באלגוריתמי ניווט ושיערוך מיקום

מדעי המחשב, אוניברסיטת אריאל

מס'	שנה	סמסטר	מועד	עמוד	Check ✓
				3	
				17	
				25	
				33	
				40	
				46	
				53	
				63	
				71	

אל תפנו אלי בפרטי, אני לא המרצה/מתרגל שלכם.

הפתרונות בספר לא נבדקו ע"י מרצים, יכול להיות שתמצאו טעויות, באחריותכם בלבד!

בהצלחה 😊

פתרונות למבחנים באלגוריתמי ניווט ושיערוך מיקום

נערך ונכתב על-ידי דור עזריה

2022

ספר זה לא נבדק על ידי מרצה, יתכן שימצאו טעויות.

לסיכומים נוספים שלי במדעי המחשב ומתמטיקה:

<https://dorazaria.github.io/>

מוזמנים לעקוב אחרי 😊:

 LinkedIn: <https://www.linkedin.com/in/dor-azaria/>

 GitHub: <https://github.com/DorAzaria>

סיכום הקורס בהגדרות

מבוא הסתברותי

- **אקסיומות ההסתברות** - נגדיר Ω מרחב המדגם שלנו ונגדיר A, B מאורעות אז:

1. $\Pr(A) \geq 0$

2. $\Pr(\Omega) = 1$

3. $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ אם $A \cap B = \emptyset$

4. $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

- **הסתברות מותנית** - $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$

- **הסתברות שלמה** - $\Pr(A) = \sum_{B_i \in B} \Pr(A|B_i) \cdot \Pr(B_i)$

- **הסתברות בייס** - נסמן $H = Hypothesis$ להיות ה-"השערה" ונסמן $E = Evidence$ להיות

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(E|H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)}$$

ה-"מציאות" אז

לוקליזציה ומסנן היסטוגרמה

- **לוקליזציה גלובלית** - היכולת לדעת איפה אני נמצא כאשר מתחילים מחוסר ודאות מוחלט.
- בדרך כלל, זה המיקום ההתחלתי של הרובוט והמיקום מתפלג בהסתברות אחידה על כל המרחב.
- **לוקליזציה לוקאלית** - היכולת לדעת איפה אני נמצא עכשיו בהינתן שידעתי את מיקומי הקודם.
- **מסנן היסטוגרמה** - חלוקת העולם ל-Grid (משבצות).
 - הוא מסנן בדיד (Discrete) - המשמעות היא שהרובוט יכול להיות רק באחת מתוך המשבצות האפשריות.
 - המסנן מחלק את המרחב למשבצות ונותן פתרון לבעיות לוקליזציה גלובלית.
 - כאשר מוסיפים לו ממדים, הבעיה נהיית מורכבת חישובית בצורה אקספוננציאלית.
- **הסתברות אפריורית** - הסתברות שנמצאת לפני שאנחנו יודעים על משהו.
- **הסתברות אפוסטריורית** - האינפורמציה שקיבלנו מהחיישן בהסתברות מסוימת.
- **אלגוריתם ניווט בייסאני** - נתון עולם עם משבצות מסומנות בצבעים. חיישן מזהה כל צבע בהסתברות כלשהי. נשתמש בנוסחת בייס כדי לדעת לדוגמה: "מה ההסתברות שהרובוט בתא ירוק בהינתן שקיבלנו מהחיישן שאנחנו בתא ירוק".
- השאלה שחוק בייס פותר היא מהי הדרך לשנות את האמונה הראשונית $\Pr(H)$ או את האמונה האפריורית, לפי המדידה שהתקבלה $\Pr(H|E)$.
- **פונקציית האמונה/החישה** - $belief$ ונסמן $bel(x)$ היא איפה הרובוט מאמין שהוא נמצא. כלומר, היא ההערכה הנוכחית של הרובוט על המיקום ומיוצגת ע"י הפונקציה שהיא ההסתברות על פני כל המרחב של כל המיקומים.

- **פונקציית התזוזה ההסתברותית** - בעולם האמיתי, כאשר הרובוט יזוז על המשבצות הרבה זמן, יכולות להתחיל להיות טעויות קטנות בזמן התנועה.
 1. **Overshoot** - הרובוט זז יותר מהצפוי.
 2. **Undershoot** - הרובוט זז פחות מהצפוי.
- **אנטרופיה ואינטגרציה** - $H(x) = - \sum_x \Pr(x) \cdot \log(\Pr(x))$

האנטרופיה מגדירה עד כמה המשתנה אקראי ומה היא מידת הוודאות.

 1. ככל שהאנטרופיה גדולה יותר יש יותר אקראיות, כלומר יותר חוסר וודאות.
 2. אנטרופיה נמוכה $\Leftarrow$ וודאות גבוהה.
 3. האנטרופיה גבוהה $\Leftarrow$ וודאות נמוכה - יותר חוסר וודאות.

אם יש לנו מטבע (לא הוגן) בו שני הצדדים הם H אז ההסתברות לקבל H תהיה 1 ול- T תהיה 0.
- **פונקציית תזוזה מול פונקציית חישה** - פונקציית האמונה (החישה) $bel(x)$ מעלה תמיד את הדיוק (מורידה את האנטרופיה), ופונקציית התזוזה מורידה את הדיוק (ומעלה את האנטרופיה).
- **הנחת מרקוב** - מניחה שנתוני עבר ועתיד הם בלתי תלויים אם יודעים את המצב הנוכחי. האינדיקציה הכי טובה לקבל מה יהיה בעתיד זה לפי מה שקורה עכשיו, זה לא משנה אם נתן לו את כל ההיסטוריה כי כל המידע הזה מוכל בתוך X_{t-1} . אבל בחיים זה לא באמת נכון, לכן הנחת מרקוב היא רק הנחה ולא וודאי.

מסנן קלמן במימד אחד

- **מסנן קלמן** - פותר את בעיית המיקום בצורה רציפה ומחזיר הערכת מיקום שונה עבור כל נקודה.
 - זה תהליך מתמטי איטרטיבי שמשתמש בסט של משוואות זהה, עם נתונים שונים שמגיעים ברציפות מהחיישנים כדי לשערך במהירות את הערך האמיתי של אובייקט, כאשר הערכים הנמדדים מכילים חוסר וודאות, רעש ואקראיות.
 - ההתפלגות שחישבנו בזמן $t - 1$ הופכת לבסיס החישוב עבור זמן t .
 - ניתן לחשוב על מסנן קלמן כעל ממוצע משוקלל בין המדידה הנוכחית מהחיישן ובין הידע הקודם שלנו לגבי מצב המערכת.
- **יתרונות של מסנן קלמן** -
 1. **שיערוך עקיף** - שיערוך על פי כמה פרמטרים שונים כמו מהירות ומיקום.
 2. **היתוך חיישנים** - תהליך מתמטי של חיבור מידע מחיישנים שונים.
 3. על מנת לשפר את הדיוק במסנן היסטוגרמה, אני צריך שהגריד או שהרשת שלי תהיה כמה שיותר קטנה ולכן הרזולוציה תהיה כמה שיותר גדולה - הדבר הזה מצריך הרבה מאוד משאבים של זיכרון. בקלמן פילטר אין לי את הדבר הזה, זאת אומרת אני יכול לקחת את ההסתברות שלי ולהזיז אותה בדיוק באיזו נקודה שאני רוצה.
 4. מסנן קלמן אינו מחייב אותנו לשמור בזיכרון את כל המדידות שעשינו עד כה.
- **וקטור המצב** - הערך האמיתי.

- רעש חיישנים - מדידות חיישנים המכילות חוסר וודאות.
- הגבר קלמן - הרעיון המרכזי הוא ש-Kalman Gain יהיה כמה שיותר קטן, ואז, כאשר תהיה מדידה חדשה, גם אם היא תהיה רועשת, נוכל להכיל אותה בתוך ה-State של המערכת הקיימת. הגבר קלמן או KG עוזר בממוצע המשוקלל בין השערוך בזמן הקודם ($t - 1$) ובין המדידה בזמן הנוכחי (t).
- כשאני רוצה לנחש איפה הרובוט שלי נמצא, כלומר לשערך, אז בשערוך הזה יש חוסר וודאות שנקרא Eest. מצד שני כשאני מודד איפה אני נמצא עם החיישנים יש לי גם טעות במדידה Emeas. לכן מצד אחד יש לי חוסר וודאות במדידה ומצד שני בשערוך. שני אלה נכנסים במשוואה שנקראת הגבר קלמן.

○ סימונים:

- Eest - השגיאה בשערוך (חוסר וודאות בשיערוך)
- Emeas - השגיאה במדידה (חוסר וודאות במדידה)
- MEAS - היא המדידה
- EST - השערוך.

○ משוואות:

$$1. \quad KG_t = \frac{Eest_{t-1}}{Eest_{t-1} + Emeas_t} \quad \text{כאשר } 0 \leq KG \leq 1$$

$$\bullet \quad KG \rightarrow 1 \quad \text{כאשר } KG \approx \frac{Eest}{Eest}$$

○ יש לי יותר וודאות במדידה $\Leftarrow$ המדידה דיי מדויקת.

○ יש לי הרבה חוסר וודאות בשערוך $\Leftarrow$ מצב לא יציב.

$$\bullet \quad KG \rightarrow 0 \quad \text{כאשר } Eest_{t-1} < Emeas_t$$

○ המדידה רועשת.

○ שערוך במצב לא יציב.

$$2. \quad EST_t = EST_{t-1} + KG_t \cdot [MEAS_t - EST_{t-1}]$$

● אם $KG \rightarrow 0$ נקבל ש: $EST_t = EST_{t-1}$ כלומר, השערוך במצב מדויק.

● אם $KG \rightarrow 1$ נקבל $EST_t = MEAS_t$ כלומר, השגיאה כמעט אפסית, ועדיף

להתייחס רק אליה.

● $KG_t \cdot [MEAS_t - EST_{t-1}]$ מחשב לנו את ההפרש בין המדידה לשיערוך.

$$3. \quad Eest_t = [1 - KG_t][Eest_{t-1}]$$

○ מסקנות:

1. ככל שה-KG יותר קטן, כך שערוך המצב הקודם מדויק יותר ביחס למדידה הרועשת;

ככל שה-KG יותר גדול, כך המדידה הנוכחית מדויקת יותר על פני השערוך הקודם.

2. הרעיון מאחורי מסנן קלמן הוא מעבר על משוואות 1-3 בצורה איטרטיבית, ובכל שלב,

להקטין את ה-KG ולהגדיל בכך את האמונה שלנו בשערוך הנוכחי.

3. המשמעות היא שניתן לקבל מדידות רועשות ובכל זאת לנצל אותן על מנת לדייק

בניחוש.

- **Multimodal** - יש לי כמה ניחושים שונים שאני יכול להחזיק אותם ואין לי עניין להעדיף ניחוש אחד על פני ניחוש אחר - למשל, אני נמצא בקומה מסוימת ואני יכול להיות בקומה 1, 2 או 3 ואני מחזיק בניחושים האלה.
- **Unimodal** - יש לי רק ניחוש אחד עם חוסר ודאות - זה מה שאנחנו עושים במסנן קלמן, אנחנו מחזיקים בניחוש אחד ויחיד אבל הוא הניחוש הטוב ביותר.
- **Discrete** - אני עובר בכל תא לכל תא, הרעיון הזה נקרא Discrete, - מרחב בדיד.
יש לי מספר סופי של תאים וככל שהרזולוציה שלי גבוהה יותר, יש לי מספר גדול יותר.
- **Continuous** - אני יכול להיות בכל נקודה (ללא תאים) - מרחב רציף.
- **מסנן קלמן הוא Continuous-Unimodal**.
- **מסנן היסטוגרמה הוא Multimodal-Discrete**.
- **התפלגות גאוסית** - כל התפלגות גאוסית מתוארת על ידי שני משתנים -

1. הממוצע μ .

2. השונות σ "סטיית התקן".

$$\circ \text{ פונקציית הצפיפות PDF} - \text{נוסחה: } N(\mu_1, \sigma_1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

- **חוק ה-99.7, 95, 68** - פונקציית ההתפלגות הגאוסית היא סימטרית ונראית קצת כמו פעמון בגרף, עם שיא אחד שמייצג את הממוצע. המשמעות היא שהכי סביר שערך אקראי יימצא בדיוק על הממוצע, וככל שמתרחקים ממנו ההסתברות יורדת.
- **מתי נשתמש בהתפלגות?** - כאשר נרצה לשאול מה ההסתברות לקבל ערך מסוים? או מה ההסתברות לקבל ערכים בין תחומים כלשהם? אפשר לקבל תשובות באמצעות שני הפרמטרים בלבד.
- **התפלגות היסטוגרמה** - זו התפלגות אשר לאורך המרחב, יש בכל נקודה ערך אחר שונה. בהתפלגות היסטוגרמה אני יכול להכיל או להחזיק שני ניחושים שכל אחד מהם טוב באותה מידה.

- **מכפלת גאוסיים** - מסנן קלמן מסתמך על מערכת גאוסית. כלומר כל המדידות צריכות להיות גאוסיות. בהינתן ניחוש המתאפיין בהתפלגות גאוסית, כשנכפיל אותו עם מדידה חדשה שגם לה יש שגיאה גאוסית, נקבל מדידה מדויקת יותר.

- הכפלה של שני גאוסיאנים **יוצרת** גאוסיאן שלישי אשר הממוצע שלו נמצא בין שני הממוצעים המקוריים. התוצאה של הכפלת גאוסיינים היא שהשונות והממוצע יותר קטנה אחרי הכפלה. התהליך של הכפלה מעלה הדיוק ולכן מוריד חוסר וודאות.

$$\circ \text{ נוסחת ההכפלה: } \mu_3 = \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \sigma_3^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

○ גם אם ב- σ_2 , σ_1 יש חוסר וודאות - הכפלה של שניהם תתן לנו את σ_3 שתבטיח תוצאה

מדויקת יותר!

○ נקודות חשובות:

$$\sigma_3^2 \leq \sigma_1^2, \sigma_2^2 \quad \blacksquare$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1^2 \text{ אם } \sigma_1 = \sigma_2 \quad \blacksquare$$

■ אם $\sigma_1 \rightarrow 0$, כלומר יש לי 0 חוסר וודאות אז זה אומר שאני סומך מאוד על μ_1 עד כדי

שגם $\sigma_3^2 = 0$ כלומר חוסר הוודאות של σ_3 היא גם 0 ומכאן גם $\mu_3 \rightarrow \mu_1$.

■ אם $\sigma_1 \rightarrow \infty$ כלומר יש לי ∞ חוסר וודאות μ_1 עד כדי שעדיף לי להתעלם ממנו באופן

מוחלט ולכן נעדיף לבחור ב- σ_2 כלומר $\sigma_3^2 \rightarrow \sigma_2^2$ וגם $\mu_3 \rightarrow \mu_2$.

● סבירות Likelihood - בהינתן data, מה הסבירות שההתפלגות נכונה: $L(\text{distribution} | \text{data})$

● תזוזה אי ודאית (קונבולוציה) - המיקום החדש של הרובוט: $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$, $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

בניווט עיוור ככל שהזמן עובר, הדיוק של המערכת הולך ויורד. נרצה להבין את ההתפלגות של מיקום הרובוט לאחר תנועה המכילה אי וודאות. הנוסחאות נכונות בגלל לינאריות התוחלת והשונות.

● המודל הדינמי של מסנן קלמן - ככל שהמודל הדינמי של המערכת שלי מדויק יותר, ככה מסנן קלמן

יעבוד טוב יותר. משוואת התנועה היא $x_t = x_{t-1} + \Delta t \cdot x_{t-1}$ כאשר t זה הזמן.

● לסיכום מסנן קלמן - מסנן קלמן אינו מחייב אותנו לשמור בזיכרון את כל המדידות שעשינו עד כה.

הוא מאפשר לבחון את המדידה האחרונה ואת השערוך האחרון, ועל פי זה לגזור את כל המידע.

מסנן קלמן בשני מימדים

● גאוס בשני מימדים - התפלגות רב-נורמלית או התפלגות גאוסיאנית רב-ממדית, היא הכללה של

התפלגות נורמלית למשתנים מקריים רב-ממדיים. היא מוגדרת בתור וקטור משתנים מקריים, שכל צירוף ליניארי שלו מתפלג נורמלית.

● קורלציה - אם אני מודד רק משתנה אחד, לצורך העניין את X , ואני יודע את הקשר שבין X ל- $\bar{X}$, אני

יכול לשערך מהו $\bar{X}$. הדבר הזה בא לידי ביטוי בזה שלפעמים החישוב שלי לא מצליחים לבדוק את כל מרחב המצב. אבל מכיוון שיש קשר בין המשתנים במרחב המצב, הקשר הזה יכול לעזור לי כדי לשערך משתנה שאני לא יכול לבדוק.

● משוואות תנועה - הדרך המתמטית לתאר אובייקט שזז שזה גם יכול להיות רכב.

○ מהירות קבועה:

$$V(t) = V_0$$

$$X(t) = V_0 \cdot t + X_0$$

○ תאוצה קבועה:

$$a(t) = a_0$$

$$V(t) = a_0 \cdot t + V_0$$

$$X(t) = V_0 \cdot t + \frac{a_0 \cdot t^2}{2} + X_0$$

- **שלב ה-Prediction** - זה בעצם השלב שלוקח את המצב הנוכחי שלנו ומנסה לשערך מה יהיה בעתיד על בסיס משוואות התנועה והמודל הדינמי של המערכת.

● **שלב ה-Prediction חלק ראשון** -

- לגאוס במימד אחד נזדקק ל- μ , σ^2 , לגאוס בכמה מימדים נזדקק ל- μ , Σ .
- **וקטור המצב** - כל להגדיר μ כ- וקטור המצב - הערכים שאותם אנחנו רוצים לבדוק ולשערך למשל נסמן $\vec{x}_k = \mu$ כאשר: $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} \text{Position} \\ \text{Velocity} \end{pmatrix}$

○ **מטריצת חוסר הוודאות P**: נגדיר את מטריצת $P = \Sigma$ להיות:

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_{pos}^2 & \sigma_{pos} \cdot \sigma_{vel} \\ \sigma_{vel} \cdot \sigma_{pos} & \sigma_{vel}^2 \end{pmatrix}$$

○ **משוואות המעבר**:

1. משוואת המצב - $X_k = F \cdot X_{k-1}$

כלומר מעבר מווקטור המצב הנוכחי X_{k-1} אל וקטור המצב הבא X_k בעזרת טרנספורמציה לינארית עם מטריצת F .

2. משוואת חוסר הוודאות החדשה - $P_k = F \cdot P_{k-1} \cdot F^T$

כלומר נרצה לא רק לדעת איפה אנחנו נמצאים אלא גם מה חוסר הוודאות החדשה שלנו.

● **שלב ה-Prediction חלק שני** - להתמודד עם שינויים ידועים ורעש סטוכסטי (אקראי).

- **שינויים ידועים** - וקטור המצב מתאר לנו את כל הפרמטרים שאנחנו רוצים לדעת עליהם משהו. אבל לפעמים יש שינויים בתוך המערכת שלא קשורים לווקטור המצב למשל תאוצה/תאווה/סיבוב ההגה.

- **וקטור הבקרה** - כל שינוי שאנחנו יודעים עליו יכול להיכנס לווקטור הבקרה $\vec{u}_k$ ובכך לשפר את הדיוק שלנו.

○ **מטריצת הבקרה B** - נסמן $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{pmatrix}$

○ **משוואה עבור שינויים ידועים** - $X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot \vec{u}$. הסיבה שאין במשוואה הזאת

רעש היא מכיוון שבכל מסנן קלמן אנחנו מניחים שהרעש מתפלג סביב נקודה 0.

- **רעש סטוכסטי** - שינויים שאנחנו לא יודעים מה הם, אבל הם משפיעים לנו על המיקום של הרכב.

- מטריצת Q - מטריצה שאומרת לנו שיש לנו חוסר וודאות שהוא נוסף לחוסר הוודאות שהיה כבר בתוך המערכת כפי שבא לידי ביטוי במטריצת P הקודמת. היא מוסיפה חוסר וודאות בתזוזה. היא מוסיפה בעצם את חוסר הוודאות מגורמים חיצוניים למערכת (כמו תנאי שטח).

● משוואות עבור שלב ה-Prediction -

- $X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot \vec{u}$: השערוך הטוב ביותר שלנו עבור X_k זה השערוך שנוצר כתוצאה מהמצב הקודם X_{k-1} כולל התיקון של השפעות ידועות שחיצוניות למערכת $B \cdot \vec{u}$ (כמו תאוצה למשל).

- $P_k = F_k \cdot P_{k-1} \cdot F_k^T + Q_k$: ה- P_k מתאר את חוסר הוודאות במערכת שלנו $F_k \cdot P_{k-1} \cdot F_k^T$ יחד עם חוסר וודאות מהסביבה החיצונית שזה אותו ה- Q_k .

● שלב ה-Measurement -

- מטריצה H - נרצה ליצור טרנספורמציה בין המצב הקיים למידע שאני מקבל. הוא אומר איזה חיישנים להפעיל למשל מהירות או מיקום או גם וגם ע"י ערכים 0 או 1 במטריצה שלו.
- מטריצה R - היא מטריצת הרעש שנוצר מהמעבר בין מרחב המצב לבין מרחב החיישן.
- המשוואות - שתי המשוואות האלה בעצם לוקחות את שלב ה-Prediction ומעבירות אותו למרחב החיישן:

$$\mu_{Expected} = H_k \cdot X_k$$

$$\Sigma_{Expected} = H_k \cdot P \cdot H_k^T$$

- שלב השערוך אחרי מדידה - נרצה לדעת לסנכרן בין המדידה להערכה (וקטור המצב). את הסנכרון הזה נעשה על ידי מסנן קלמן, רק שעכשיו נצטרך לעלות במימדים. נעשה סידור במשוואות שהכרנו כבר ונקבל את השלב הבא :

$$X_k' = X_k + K' \cdot (\vec{Z}_k - H_k \cdot X_k)$$

$$P_k' = P_k - K' \cdot H_k \cdot P_k$$

$$K' = P_k \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot P_k \cdot H_k^T + R_k)^{-1}$$

● סיכום שלושת השלבים -

1. בשלב הראשון היה לנו Prediction - כלומר אני יודע איפה אני נמצא עכשיו, אני מכיר את המודל הדינמי והעברתי אותו קדימה.
2. בשלב השני היה לנו מדידה Measurement.
3. בשלב השלישי היה לקחת את המדידה ואת הפרדיקציה, לחבר אותם ביחד לפי הכפלת גאוסיאנים ולקבל את השערוך החדש.
4. ברגע שיש לנו את חוסר הוודאות של הפרדיקציה והמדידה אז אנחנו יכולים להסיק מזה בדיוק טוב את השאלה - היכן הרכב שלנו באמת נמצא (לפי הכפלת גאוסיאנים).

● מסנן קלמן הוא מסנן רקורסיבי.

מסנן קלמן מורחב

מסנן קלמן מורחב לוקח כל פונקציה אפילו לא לינארית ומנסה למצוא לה פונקציה קרובה שהיא לינארית על ידי פיתוח טיילור מסדר ראשון. זאת אומרת, מקרבים את הפונקציה על ידי פולינום ממעלה ראשונה למשהוא שהוא לינארית ומשתמשים בדבר הזה במקום בפונקציה המקורית.

- **סוגי חיישנים** - עבור תנועה לא לינארית, מסנן קלמן לא יביא תוצאה אופטימלית. מה נעשה עם חיישנים שלא יודעים להחזיר תשובה לינארית? כיצד נתמודד? - הפתרון זה שימוש בקלמן מורחב שמשתמש בקירוב של פונקציות.

- **חיישן GPS** -

- יתרונות: זול ונפוץ, חינומי.
- חסרונות: שימושי רק בחוץ ולא מספיק מדויק.

- **חיישן IMU** - מכיל:

- מד תאוצה
- מד מהירות זוויתית
- מגנטומטר - משתמשים בשביל לזהות "מנח"

- **חיישן ה-LiDAR** - מזהה בעזרת קרן לייזר את העצמים - מבצע סריקה תלת-מימדית של המרחב.

- ה-LiDAR שולח קרן לייזר עד לאובייקט, הקרן מגיעה, פוגעת ומתפזרת לכל הכיוונים. בין היתר היא חוזרת בכיוון הנגדי של כיוון ההגעה שלה ואז ה-LiDAR קולט אותה בחזרה באמצעות חיישן האור.
- השעון המדויק יכול למדוד כמה זמן עבר מהרגע ששלחנו את הקרן עד הרגע שקיבלנו אותה בחזרה.

- **ענן הנקודות** - למקבץ הנקודות הזה במרחב אנחנו קוראים **Point Cloud** - שזה מה ש-LiDAR מספק לנו. מה שניתן לעשות עם ענן הנקודות הוא:

1. לשחזר תמונה תלת מימדית כמעט כמו בתמונה.
2. רגיסטרציה - זה להבין שאותו סט נקודות שתיארו אובייקט שהיה לנו במצב $t = 0$ גם יתאר את אותו האובייקט במצב $t = 1$.

- **חיישן ה-RADAR (מכ"מ)** - חיישן הרדאר מאפשר לדעת את המהירות של האובייקט שאנחנו עוקבים

- אחריו. אנחנו רוצים לשערך איפה האובייקט יהיה ברגע הבא כדי לא לדרוס אותו.
- בחיישן הזה יש חוסר לינאריות, אין לנו שום קשר בין וקטור המצב לבין מרחב החיישן, כלומר אין לנו איך לחבר אותם יחד בהעתקה לינארית.
- **מה מקבלים מהחיישן?**

1. **מרחק** - את המרחק מאיתנו, מהחיישן לאובייקט שעליו אנחנו עוקבים. למרחק נקרא Rho ונסמן ρ .
2. **זווית** - כלומר הזווית בין החיישן ובין האובייקט - לזווית נקרא Φ ונסמן ϕ .
3. **מהירות** - כלומר את המהירות הרדיאלית - מדובר על המהירות שבה האובייקט מתרחק או מתקרב אלינו. למהירות נקרא $Rho\ Dot$ ונסמן $\dot{\rho}$.

○ נוסחאות: נשים לב שאף אחד מהמשוואות האלו לא לינאריות:

$$\hat{z}_t = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ tg^{-1} \frac{p_y}{p_x} \\ \frac{\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \end{pmatrix}$$

לינאריזציה במסנן קלמן מורחב

מסנן קלמן מורחב לוקח כל פונקציה אפילו לא לינארית ומנסה למצוא לה פונקציה קרובה שהיא לינארית על ידי **פיתוח טיילור מסדר ראשון**. זאת אומרת, מקרבים את הפונקציה על ידי פולינום ממעלה ראשונה למשהוא שהוא לינארית ומשתמשים בדבר הזה במקום בפונקציה המקורית.

את ההכללה של פיתוח טיילור למימדים נוספים נראה באמצעות יצור מתמטי שנקרא "**יעקוביאן**".

● פיתוח טיילור - נקרב את הפונקציה על ידי פיתוח טיילור מסדר ראשון.

$$\circ \text{ נוסחה: } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$$

○ חסרון: החסרון במסנן קלמן EKF הוא שכאשר מתרחקים מ-a אז התוצאה פחות ופחות מדויקת.

○ מסנן קלמן מורחב יעבוד טוב בסביבות הליניאריות.

● מטריצת יעקוביאן - מכלילים את הפיתוח למימדים נוספים ומשתמשים בזה במסנן הקלמן שלנו.

○ המטריצה הזאת היא הסכום של כל הנגזרות החלקיות.

○ המימדים של המטריצה מייצג לנו את המעבר ממרחב המצב למרחב החיישן.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & & & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

היתוך חיישנים במסנן קלמן מורחב

כאשר יש לי מידע מחיישנים שונים, השאלה היא איך אני יכול לקחת את כל המידע הזה ובעצם לחבר אותו ביחד כדי לקבל תוצאה שהיא יותר טובה מכל אחד מהחיישנים בנפרד?

• נושאים -

- קליברציה - כאשר מקבלים חיישנים, לא ניתן להתחיל לעבוד איתו מיידית וצריך להתאים אותו למערכת.
- מיקום החיישן על הרכב - כל חיישן ממוקם במקום מעט שונה בכל רכב, ולכן צריך לנרמל את כל החיישנים לנקודה אחת.
- קצב הרענון - כל חיישן נותן אינדיקציה בזמן שונה וצריך ליצור מנגנון שיודע לעבד את המידע בזמנים שונים.
- אופן המדידה - לרוב ניקח את המדידות המעובדות כלומר את הנתונים שהחיישן מקבל מתורגמים למידע שאנחנו נוכל לעבוד איתו.
- החזקה של היתוך חיישנים - היכולת לשלב חיישנים עם קצב עדכון נמוך ביחד עם קצב עדכון גבוה.
 - כאשר אני עובד עם חיישן, יש לי שתי אופציות של מדידה שאני יכול לקחת:
 1. המדידות הגולמיות - לחשב ולייצר את מה שהחיישן אמור לספק לי.
 2. המדידות המעובדות - כמו למשל מיקום הרכב או נקודות x, y, z .
- מושג ה-Loose Coupling - כאשר אני משתמש במדידות הגולמיות, בעצם אני מקבל משהו שהוא מצד אחד הרבה יותר מדויק אבל הרבה יותר קשה לעבודה מבחינה חישובית כי אני צריך לקחת את כל ענן הנקודות הזה ובעצם להוציא ממנו חישובי x, y, z שזה יכול להיות מאוד מאוד יקר מבחינה חישובית לרכב אוטונומי שגם עושה דברים אחרים. כדי לפתור את הבעיה הזאת, מה שאנחנו בדרך כלל מנסים לעשות זה להשתמש במה שנקרא **Loose Coupling**, שזה לקחת מהחיישן את המדידות המעובדות. המדידות האלה יהיו יותר יעילות מבחינה חישובית ומסנן הקלמן יפתור לנו את חוסר הדיוק.
- מדידות בזמנים שונים
 - Measurement Update זה לקבל את המידע מהחיישן, ולפי המידע מהחיישן, לקבל ניחוש שהוא טוב יותר, או מה שנקרא "ניחוש אפוסטריורי".
 - State Prediction בא לידי ביטוי במטריצת F . זה המודל הדינאמי של המערכת וזה מה שמביא אותי, או מעביר אותי, מ- X_k ל- X_{k+1} .
 - State Prediction מעלה את חוסר-הוודאות בעוד ש-Measurement Update מעלה את הוודאות, ולכן היינו רוצים כמה שיותר סשנים של Measurement Update.
- מצב אסינכרוני במדידות זמנים שונים - זה מצב שבו שני החיישנים לא מתואמים.
 - בכל זמן (k) אני מקבל מדידה ומבצע עליה את השערוך על פי האלגוריתם, ומבצע עדכון.
 - כלומר, מגיע חיישן, אנחנו משערכים, או עושים Prediction, ואחרי זה אנחנו עושים Measurement Update, פעמיים, אחד לכל חיישן.
 - עבור כל חיישן יש לנו 2 שלבים: שלב השערוך ושלב העדכון
- מצב סינכרוניים במדידות בזמנים עוקבים -

- במצב א-סינכרוני ביצענו לכל חיישן בנפרד: $Prediction \rightarrow Measurement Update$
- במצב סינכרוני נפעל בצורה הבאה: $Prediction \rightarrow L Update \rightarrow R Update$
- מה קורה למשל אם בנקודה $3 + k$ אני מקבל בו-זמנית גם מדידה מה-RADAR וגם מדידה מה-LiDAR? איך אז אני אתנהל כאשר אני ארצה להתיך את שני החיישנים ביחד?
- אני יכול לעשות קודם כל עדכון לפי הרדאר ואז עדכון לפי הליידאר.
- **מדידות בזמנים שונים** - בחיים האמיתיים, לא נקבל את המדידות בהפרשי זמנים קבועים אלא שונים.
- אנחנו צריכים בכל שלב לעדן את Δt .

- **מטריצת השונות** - מה נעשה כאשר אין לנו תאוצה ונצטרך לשערך את התאוצה?

$$Q = [u \cdot u^T] = E[Ga \cdot (Ga)^T] = G \cdot E[aa^T] \cdot G^T$$

- את המטריצה הזאת אנחנו נוסיף לווקטור P כאשר נחשב את הרעש.
- **שגיאת ה-RMSE** - נקבל וקטור של ערכים אמיתיים ווקטור של ערכים משוערים ונצטרך לפתור את המשוואה ולגלות עד כמה האלגוריתם שלנו מדויק.

○ נוסחה:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^{Est} - x_i^{True})^2}$$

מסנן חלקיקים - Particle Filter

כאשר רובוט ממוקם ונדרש להציג לוקליזציה גלובלית, אנחנו צריכים לדעת היכן הוא נמצא בעזרת חישוב של חיישנים. מסנן חלקיקים מציג שימוש בחלקיקים. כל חלקיק שכזה יש ניחוש יחיד עבור איפה הרובוט עלול להיות וכל חלקיק מאופיין בשלושת הערכים הבאים: קואורדינטה X , קואורדינטה Y , כיוון התנועה שלו (הנטייה שלו). שלושת הערכים האלה מייצגים ניחוש יחיד. בעצם מאחר ויש לנו אלפי חלקיקים אז יש לנו אוסף של אלפי ניחושים במרחב וביחד הם יכולים לשער את המיקום של הרובוט.

- תחילה, החלקיקים מפוזרים במרחב באופן אחיד ומסנן החלקיקים מאפשר להם להמשיך להתקיים במידה וחלקיק כלשהו הוא עקבי עם חישובי החיישן.
- חלקיקים שעקביים יותר עם החישובים של החיישן סביר להניח שישרדו יותר. בהסתברות גבוהה יאספו יותר חלקיקים עם הזמן וכך הם ייצגו יותר את האמונה של הרובוט.
- **מסנן חלקיקים הוא Continuous וגם Multimodal.**
- **השוואת מסננים** -

	מרחב המצב	פונקציית האמונה	Efficiency
Histogram Filter	Discrete / בדיד	Multimodal	Exponentially
Kalman Filter	Continuous / רציף	Unimodal	Quadratic / ריבועי
Particle Filter	Continuous / רציף	Multimodal	תלוי מקרה

- תלוי מקרה - ריבועי: אם אתה פורס את החלקיקים שלך בצורה נכונה ואם אתה מכוון את האלגוריתם שלך בתוך גבולות מסוימים לא תהיה מורכבות אקספוננציאלית.

- תלוי מקרה - אקספוננציאלי: אני צריך להוסיף חלקיקים ככל שאני מתקדם במימדים, נגיד שאני צריך 1000 חלקיקים לכסות אזור דו מימדי, אני אצטרך בערך מיליון חלקיקים לכסות את אותו אזור בתלת מימד.
- מרחב הרובוט - במרחב יש Landmarks (בד"כ 4 כאלה), ומפוזרים באופן אחיד N חלקיקים כך שלכל חלקיק יש (θ, y, x) , כלומר מיקומו x, y וגם הנטייה שלו.
- משקלים - צורך במשקלים שאומר לנו עד כמה חשוב החלקיק בפרט. ככל שהמשקל גדול יותר - ככה הוא חשוב יותר. ההסתברות של החלקיקים להישרדות תהיה תלויה במשקלים שלהם.
- דגימה חוזרת Resampling - תהליך שנקרא Resampling שבעצם אחראי להציב N חלקיקים חדשים באופן אקראי מהחלקיקים הישנים בהחלפה בהתאם לגודל המשקלים שלהם. החלקיקים שמאוד עקביים עם מדידות החיפוש ישרדו יותר בהסתברות גבוהה והאחרים פשוט ימחקו.
- גלגל ה-Resampling - נציג את כל החלקיקים והמשקלים בגלגל רולטה גדול. כל חלקיק שולט על חתיכה בהתאם למשקלו. אנחנו צריכים לחפש בין כל החלקיקים עבור איזה חלקיק החץ מצביע בהתאם למשקל, את החיפוש אפשר לעשות בעזרת חיפוש בינארי שזה $O(\log N)$ מה שאומר שזמן הריצה של גלגל הרולטה הזה הוא $O(N \log N)$.
- שיטת Low Variance Resampling - לפעמים לכל החלקיקים יש את אותו המשקל. במקרה כזה אנחנו נסיים את תהליך ה-Resampling כאשר לא העלמנו אף חלקיק. כלומר, אנחנו לא נרצה לשנות את ההתפלגות. אנחנו לא בוחרים רק חלקיק אחד בכל פעם, אלא בוחרים בו-זמנית N חלקיקים.
- תרחיש Kidnapped Robot - בחלק מהמקרים יכול להיות מצב בו הרובוט יעלם. כדי שזה לא יקרה, בכל שלב נפזר כ-10% מהחלקיקים במקומות מקריים ואז נקבל מצב בהסתברות גבוהה יותר שלא נאבד את הרובוט. כי החלקיקים שפיזרנו באקראיות יהיו כמו "תצפיתנים" שידווחו על הרובוט.
- מודל Yaw Rate - יש איזשהו שינוי של הזווית או של האוריינטציה לאורך הזמן, הפונקציה מקבלת חלקיק במיקום מסוים עם זווית מסוימת ומזיזה אותו לפי המשוואות.
- התמרות הומוגניות - שיטה שמעבירה מהקורדינטות של הרכב שלי לקאורדינטות של העולם. מה שבאמת נרצה לראות זה איפה נמצאות הקאורדינטות האלה על המפה.
- פונקציית משקל מתקדמת - כאשר פונקציית המשקל שלנו מתעלמת מהעבר, אי-הרציפויות האלה יכולות לגרום לטעויות גדולות. כאשר אני מסתכל גם על המשקל של החלקיק בפעם הקודמת, אני מוריד לי את טווח השגיאה.
- חישובי שגיאה במסנן חלקיקים - הערך האמיתי של הרובוט נקרא Ground Truth ונסמן אותו g . כלומר: $GroundTruth = g = (x, y, \theta)$. פונקציית השגיאה שלנו: אנחנו עוברים על כל החלקיקים, מוצאים את החלקיק שיש לו את המשקל הגדול ביותר ואז אותו בוחנים אל מול המציאות: $error = |P_{Best} - g|$.

בעיות חיפוש

בהינתן: מפה, מיקום התחלתי, מיקום סופי ועלות (זמן נסיעה).
מטרה: נרצה למצוא את המסלול הזול ביותר בין המקור ליעד.

פעולות: נסיעה ישר וסיבוב הרכב.

- **מבוכ** - נניח ויש לנו מבוכ עם מקור ויעד, נרצה למצוא את המסלול הזול ביותר אל היעד.
נתון לנו רובוט עם יכולות פעולה ($up, down, right, left$).
- **תכנון המסלול** - תכנון המסלול או בעיית החיפוש היא מציאת סדרת הפעולות הקצרה ביותר שתוביל את הרובוט מהמקור אל היעד.
- **אלגוריתם חיפוש A^*** - אלגוריתם זה משתמש בפונקציה היוריסטית h . לכל תא במפה שלנו יש ערך כלשהו $h(x, y)$. הפונקציה היוריסטית h לא מתייחסת למכשולים שכאלה, היא יוצרת מפה בגודל תואם למפה הקיימת ובכל תא יש ערך כלשהו המייצג עלויות.
- **פונקציה היוריסטית h** - לפונקציה היוריסטית חייב להיות ניחוש אופטימלי עבור עד כמה אנחנו רחוקים מהיעד שלנו. הפונקציה היוריסטית לא חייבת להיות מדויקת. כלומר היא מראה לנו את המרחק המשוער האופטימלי ביותר שניתן לקבל: $h(x, y) \leq \text{the true distance from } x \text{ to } y$. כלומר הוא מציג לנו את החסם האופטימלי ביותר שניתן לקבל ללא התחשבות במכשולים כלל.
- **שלב התיקון** - נסמן ב- g את מספר הפעולות שנדרש ממנו להגיע עד למיקום הנוכחי.
פונקצית חישוב f לתרחישים שכאלה: $f = g + h(x, y)$. אם אנחנו עומדים במשבצת כלשהי ונרצה לדעת לאיזה תא להתקדם (שהוא הכי זול בשבילנו) מבין ה-2 שהם a, b אז נחליט לפי $\min(f_a, f_b)$.
- **תכנות דינאמי** - תכנות דינאמי נותן לנו אופציה אופטימלית לכל תא במפה שלנו. במקרים מסוימים הרכב צריך להגיע אל היעד בדרך חלופית, לכן כדאי שנכיר "כל מקום במפה".
- **פונקציה ה- $Policy$ בתכנות דינאמי** - לכל תא יש תיוג (כמו סימון של חץ) שנקרא לעיתים $Policy$. הפונקציה $Policy$ ממפה כל תא (משבצת) עם פעולה מסוימת: $up, down, right, left$.
- **שיטת 3 הפעולות** - שלושת הפעולות האפשריות לתנועה ממשבצת למשבצת הם:
 1. התקדמות קדימה ממשבצת למשבצת
 2. פניה שמאלה ורק אז התקדמות
 3. פניה ימינה ורק אז התקדמות

אלגוריתם PID

ראינו שתכנון מסלול במפה דיסקרטית (עם משבצות מוגדרות) מכיל מסלולים דיי פשוטים וכמה מכשולים. במציאות, רכב לא יכול לבצע פניות חדות כפי שמתואר במקרה ה-"לא חלק" (משבצות).

- **אלגוריתם מסלול חלק** - x_i היא הפעולה ה- i מתוך סדרת הפעולות שיוצרות את המסלול הכולל.

אנחנו נעבוד בעזרת Gradient Descent, בכל צעד ניקח את הצעד הקטן ביותר לכיוון שממזער את הטעות שלנו. כל איטרציה עבור 2 הקריטריונים מוגדרת כך:

$$y_i = y_i - \alpha(x_i - y_i) \quad , \quad y_i = y_i - \beta(y_{i+1} - y_i)$$

מיזוג הצעדים שמאלה וימינה מוגדרת כך: $y_i = y_i - \beta(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i)$

- **תכונות המשקל אלפא** -

- ככל ש- α גדול יותר ככה המסלול יהיה חלק יותר.
- ככל ש- α קטן יותר ככה המסלול יהיה כמסלול המקורי עם הנקודות המקוריות (פניות חדות).
- **אלגוריתם PID** - לרכב יש "שגיאת מעבר" או בשפה רשמית CTE. בקר ה-PID של ההיגוי מנתח את שגיאת המסלול הצולב (CTE) ומחשב את זווית ההיגוי שמנסה להחזיר את המכונית לקו המרכז (גודל מינימלי של CTE).

- **רכיב P** - רכיב P, או "פרופורציונלי", מגדיר את זווית ההיגוי ביחס ל-CTE עם גורם פרופורציונלי τ . אנחנו מסובבים את הגלגלים בזווית פרופורציונלית: $\alpha = \tau + CTE$.

- ערכים גדולים יותר של P מביאים לתגובות מהירות יותר של זווית ההיגוי ביחס ל-CTE.
- ערכים קטנים יותר של P מביאים לתגובות איטיות יותר של זווית ההיגוי ביחס ל-CTE.

- **רכיב D** - הרכיב D, או ה"דיפרנציאלי", נוגד את הנטייה של רכיב P-לחרוג מהקו המרכזי. הוא מכון נכון ויגרום למכונית להתקרב לקו המרכז בצורה חלקה מבלי לחרוג בסיבובים.

$$\alpha = -\tau_p \cdot CTE - \tau \cdot \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot CTE$$

- **הטייה שיטתית** - במציאות לפעמים הגלגלים קצת חורגים מכיוונם. עבור בני אדם זה לא ממש משמעותי כי אנחנו מטבענו תמיד מתקנים עם ההגה ללא הבחנה. במקרה הרבובטי, מקרים כאלה יגרמו לשגיאה חדשה CTE.

- **רכיב I** - הרכיב I, או ה"אינטגרל", נוגד הטיה ב-CTE המונעת מהבקר P+D להגיע לקו האמצע. הוא בעצם יודע להתמודד עם בעיית ההטייה השיטתית.

$$\alpha = -\tau_p \cdot CTE - \tau \cdot \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot CTE - \tau_I \sum CTE$$

- **אלגוריתם Twiddle** - הוא מוצא τ טוב מספיק.

נרצה לממש את האלגוריתם כדי למזער את ממוצע ה-CTE.

- לכל קואורדינטה בפרט, נזיז את הפרמטרים שלנו למעלה או למטה לפי הערכים ב-dp.
- אם הוא מוצא פתרון טוב יותר, הוא שומר אותו ומעלה את הערך שלו ב-dp.
- אם הוא לא מוצא פתרון טוב יותר, הוא חוזר לפתרון המקורי ומוריד את הערך שלו ב-dp.
- אנחנו נבצע את זה שוב ושוב כל עוד הסכום של dp גדול יותר מהגבול.
- ברגע שהוא קטן מהגבול, זה אומר שאכן הגענו למתבקש.

סיכום המבחן

הסבר פתרון שאלות לפי נושאים, סד"פ ושיטות.
המבחן בנוי בדרך כלל מ-4 שאלות, כל שאלה קשורה לנושא כלשהו.
הנושאים האפשריים מוצגים כאן בסדר יורד לפי מידת השכיחות ($1 =$ הכי נפוץ) במבחנים:

1. הסתברויות.
2. מסנן היסטוגרמה - משבצות.
3. מסנן קלמן - חישוב מטריצות ופעולות מהאלגוריתם.
4. חישוב מטריצת היעקוביאן.
5. בקר PID.
6. מסנן חלקיקים.
7. מושגים מהקורס.

הסתברויות

זה שאלה מספר 1 במבחן ולרוב מכילה 2 סעיפים.
ההסתברויות בדרך כלל מתבססות על חישובים של נוסחת בייס וההסתברות השלמה.

שלבים לפתרון:

1. נתרגם את השאלה לצורה פורמלית עם פונקציית ההסתברות Pr .
2. ננתח ונציג את הנתונים שלנו על הדף כדי לפתור ביעילות וכדי למנוע טעויות מיותרות.
3. לרוב, צריך לחשב "הסתברויות משניות" לפני שמחשבים את ההסתברות של השאלה.
4. נציב את כל החישובים שלנו בהסתברות של השאלה ונציג את הפתרון הסופי.

שאלה לדוגמה (מועד א' 2020):

בשנת 1995, הוסיפה חברת M&M את הצבע הכחול. עד אז, התפלגות הצבעים בשקית M&M היתה נראית כך:
 $30\% \text{ Brown}, 20\% \text{ Yellow}, 20\% \text{ Red}, 10\% \text{ Green}, 10\% \text{ Orange}, 10\% \text{ Tan}$
 לעומת זאת, החל משנת 1995, התפלגות הצבעים נראית כך:
 $24\% \text{ Blue}, 20\% \text{ Green}, 16\% \text{ Orange}, 14\% \text{ Yellow}, 13\% \text{ Red}, 13\% \text{ Brown}$
 לחבר שלכם יש 2 שקיות M&M, אחת משנת 1994 ואחת משנת 1996 והוא לא מוכן לגלות לכם איזו שקית שייכת לאיזו שנה. אבל הוא נתן לכם סוכריה אחת מכל שקית. סוכריה אחת היא צהובה ואחת היא ירוקה. מה הסיכוי שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994?

שלבי פתרון:

1. נתרגם את השאלה לצורה פורמלית עם פונקציית ההסתברות $\Pr$:
נשים לב שיש כאן הסתברות מותנית, כלומר הוסיפו לנו מידע בשאלה שבעזרתה אפשר לפתור את ההסתברות שלנו.
כלומר שואלים אותנו "מה הסיכוי שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994?".
והוסיפו לנו את המידע "לחבר שלכם יש 2 שקיות M&M, אחת משנת 1994 אבל הוא נתן לכם סוכריה אחת מכל שקית".

יהא A המאורע ש: "שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994".
יהא B המאורע ש: "יצא סוכריה ירוקה וצהובה אחת מ-94' ואחת מ-96".
נרצה לחשב את ההסתברות $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$.
2. ננתח ונציג את הנתונים שלנו על הדף כדי לפתור ביעילות וכדי למנוע טעויות מיותרות.
במבחן צריך לכתוב על דף לכן נציג את הנתונים מהשאלה בצורה נוחה יותר לעין:

בשנת 1994 היה: 0.3 Brown, 0.2 Yellow, 0.2 Red, 0.1 Green, 0.1 Orange, 0.1 Tan.
בשנת 1996 היה: 0.24 Blue, 0.2 Green, 0.16 Orange, 0.14 Yellow, 0.13 Red, 0.13 Brown.
צריך לחשב את $\Pr(A \cap B)$ וגם את $\Pr(B)$.
3. לרוב, צריך לחשב "הסתברויות משניות" לפני שמחשבים את ההסתברות של השאלה.
נחשב את $\Pr(B)$, כלומר, נחשב את ההסתברות ש: "יצא סוכריה ירוקה וצהובה אחת מ-94' ואחת מ-96". יש לנו בעצם 2 אפשרויות:
I. יצא ירוק משנת 1994 וגם יצא צהוב משנת 1996
II. יצא צהוב משנת 1994 וגם יצא ירוק משנת 1996
עבור אפשרות I, ירוק 0.1 וגם צהוב 0.14 כלומר $\Pr(I) = 0.1 \cdot 0.14$
עבור אפשרות II, צהוב 0.2 וגם ירוק 0.2 כלומר $\Pr(II) = 0.2 \cdot 0.2$
לכן: $\Pr(B) = 0.1 \cdot 0.14 + 0.2 \cdot 0.2$

נחשב את $\Pr(A \cap B)$, כלומר, צריך למצוא את המשותף בין A לבין B .
אם A המאורע ש: "שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994", אז צריך להתייחס למקרים בהם ב-
 B יצא סוכריה צהובה משנת 94'. לכן צריך להתייחס להסתברות בה: "יצא צהוב משנת 1994 וגם יצא ירוק משנת 1996". נשים לב שכבר חישבנו את זה באפשרות II מקודם.
לכן $\Pr(A \cap B) = 0.2 \cdot 0.2$
4. נציב את כל החישובים שלנו בהסתברות של השאלה ונציג את הפתרון הסופי.

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.1 \cdot 0.14 + 0.2 \cdot 0.2} = \frac{20}{27} = 0.74$$

מסנן היסטוגרמה - משבצות

שאלה זו היא בדרך כלל שאלה 2 במבחן ומכילה 2 סעיפים כאשר בסעיף השני בדרך כלל מוסיפים שינויים חדשים ללוח או שמשנים את הטעות.

מה נתון לנו?:

- לוח - לוח שבנוי ממשבצות ובתוכם צבעים / מספרים / מחסומים
- אחוז דיוק - עבור כל משבצת.
- אחוז טעות - עבור כל משבצת.
- מסלול - מה רצף האירועים עד לשאלה הניתנת.
- התפלגות התחלתית - לרוב אנחנו נתחיל את התרגיל עם התפלגות אחידה.

שלבי פתרון:

1. ההסתברות ההתחלתית - במידה והיא אחידה אז לכל משבצת יהיה את ההסתברות $\frac{1}{k}$.
כאשר k הוא מספר המשבצות האפשריות. משבצת לא אפשרית היא משבצת חסומה.
2. חישוב תחוש - בהתאם למה שהחישן הרגיש: (ההסתברות האפרורית) · (אחוז הדיוק/טעות). נבצע את החישוב הזה עבור כל משבצת ולאחר מכן ננרמל את הכל.
3. חישוב תנועה - הזזת ההסתברות בכיוון התנועה בהתאם להנחיות בשאלה.
חשוב לשים לב לגבי מחסומים או עולמות לא ציקליים (לא מעגליים) כלומר קיר חוסם.

שאלה לדוגמה (מועד א' 2020):

אדום	מחסום ####	ירוק
ירוק	אדום	אדום
ירוק	אדום	ירוק

- אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרוב יש חישן המזהה צבעים. החישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:
- במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החישן ידווח אדום בהסתברות של 80%. ירוק – 20%
במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החישן ידווח ירוק בהסתברות 70% ואדום – 30%
העולם ציקלי כלפי מעלה ומטה אך אינו ציקלי כלפי ימין ושמאל. (אם הרובוט הגיע לקיר הימני, הוא לא יוכל ללכת ימינה. מאידך, אם הרובוט הגיע לתא עליון, אם הוא יזוז למעלה, הוא ייצא מהתא התחתון באותה עמודה. שימו לב שהרובוט לא יכול להגיע למשבצת עם המחסום בשום אופן.
- בדוגמה שלנו, החישן הרגיש "ירוק" ואז הרובוט זז ימינה. ולאחר מכן זז למטה. התזוזה הינה מדויקת.
1. מה ההסתברות שהחישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?
 2. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה למטה אינה ודאית. יש 80% שהרובוט זז למטה אבל 20% שהוא נשאר באותו מקום. (התזוזה ימינה ושמאלה עדיין ודאית ועדיין לא ניתן להיות במחסום).

שלבי פתרון לסעיף א':

1. ההסתברות ההתחלתית - במידה והיא אחידה אז לכל משבצת יהיה את ההסתברות $\frac{1}{k}$.
 כאשר k הוא מספר המשבצות האפשריות. משבצת לא אפשרית היא משבצת חסומה.
 מספר המשבצות במקרה הזה הוא $k = 8$ נשים לב שיש מחסום ולכן לא נחשיב אותו.
 לכן ההסתברות ההתחלתית היא $\frac{1}{8}$.

ההתפלגות האפריורית אחידה, הלוח שלנו נראה כך:

$\frac{1}{8}$	מחסום	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. חישוב תחוש - בהתאם למה שהחיישן הרגיש: (ההסתברות האפריורית) $\cdot$ (אחוז הדיוק/טעות). נבצע את החישוב הזה עבור כל משבצת ולאחר מכן ננרמל את הכל.
 החיישן חש ירוק ולכן נכפיל כל משבצת בהסתברות הרלוונטית אליה ואז ננרמל, לפי הנתון אנו יודעים ש:
 במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החיישן ידווח אדום 0.8 וירוק - 0.2.
 במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החיישן ידווח ירוק 0.7 ואדום - 0.3.
 לכן נחשב עבור כל תא בלוח ואחרי כל החישובים אנחנו ננרמל.

עבור משבצת אדומה נחשב: $\frac{1}{8} \cdot 0.2 = \frac{1}{40}$ ועבור משבצת ירוקה נחשב: $\frac{1}{8} \cdot 0.7 = \frac{7}{80}$

$\frac{1}{40}$	מחסום	$\frac{7}{80}$
$\frac{7}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
$\frac{7}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{7}{80}$

כעת ננרמל לפי: $\Sigma = 4 \cdot \frac{1}{40} + 4 \cdot \frac{7}{80} = \frac{9}{20} = 0.45$

לכן עבור ההסתברות להיות בתא הירוק נחשב: $\frac{7}{80} \cdot \frac{20}{9} = \frac{7}{36}$

עבור ההסתברות להיות בתא האדום נחשב: $\frac{1}{40} \cdot \frac{20}{9} = \frac{1}{18}$

$\frac{1}{18}$	מחסום	$\frac{7}{36}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$

3. חישוב תנועה - הזזת ההסתברות בכיוון התנועה בהתאם להנחיות בשאלה.
 לפני שמתחילים את השלב הזה, חשוב לבדוק האם התזוזה מדויקת או לא וגם לשים לב לגבי מחסומים או עולמות לא ציקליים (לא מעגליים) כלומר קיר חוסם.

צריך לבצע לפי הדרישות הזזה ימינה ואז למטה, נשים לב שהתזוזה מדויקת.

כרגע אנחנו במצב:

$\frac{1}{18}$	מחסום	$\frac{7}{36}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$

נזוז ימינה:

$0 + \frac{1}{18}$	מחסום	$0 + \frac{7}{36}$
0	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18} + \frac{1}{18}$
0	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36} + \frac{1}{18}$

כלומר אנחנו במצב:

$\frac{1}{18}$	מחסום	$\frac{7}{36}$
0	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$

נזוז למטה:

0	מחסום	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{18}$	0	$\frac{7}{36}$
0	$\frac{7}{36} + \frac{7}{36}$	$\frac{1}{9}$

כלומר נקבל:

0	מחסום	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{18}$	0	$\frac{7}{36}$
0	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

כעת, רק עכשיו אחרי כל התהליך הזה, אפשר יהיה לענות על הסעיף.
מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

נסכום את כל המשבצות הירוקות (המקרים בהם הרובוט נמצא במשבצת ירוקה) ונכפיל בהסתברות שהחיישן ידווח "ירוק" = 70%.

נסכום את כל המשבצות האדומות (המקרים בהם הרובוט נמצא במשבצת אדומה) ונכפיל בהסתברות שהחיישן ידווח "ירוק" = 20%.

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Green 2nd time}) &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{18} + 0 + \frac{1}{9} \right) \cdot (0.7) + \left(0 + 0 + \frac{7}{36} + \frac{7}{18} \right) \cdot (0.2) = \\ &= \frac{7}{24} + \frac{7}{60} = \frac{49}{120} \end{aligned}$$

שלבי פתרון לסעיף ב':

בסעיף ב', התזוזה למטה לא וודאית, 80% שהרובוט זז למעלה אבל 20% שהוא נשאר במקום. בסעיף זה מספיק לחזור לשלב חישוב התנועה ולפתור אותו מחדש בהתאם לדרישות החדשות.

בסעיף א', החייושן הרגיש:

$\frac{1}{18}$	מחסום	$\frac{7}{36}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$

נתון לנו רעש בתזוזה למטה, אך תזוזה ימינה ושמאלה עדיין וודאית ולכן נזוז ימינה באופן וודאי:

$\frac{1}{18}$	מחסום	$\frac{7}{36}$
0	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$

כעת נזוז למטה באופן לא ודאי בהתאם לאחוז הרעש הנתון בתרגיל:

$\frac{1}{18} \cdot 0.2$	מחסום	$\frac{7}{36} \cdot 0.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.8$
$\frac{1}{18} \cdot 0.8$	$\frac{7}{36} \cdot 0.2$	$\frac{1}{9} \cdot 0.2 + \frac{7}{36} \cdot 0.8$
0	$\frac{7}{36} + \frac{7}{36} \cdot 0.8$	$\frac{1}{4} \cdot 0.2 + \frac{1}{9} \cdot 0.8$

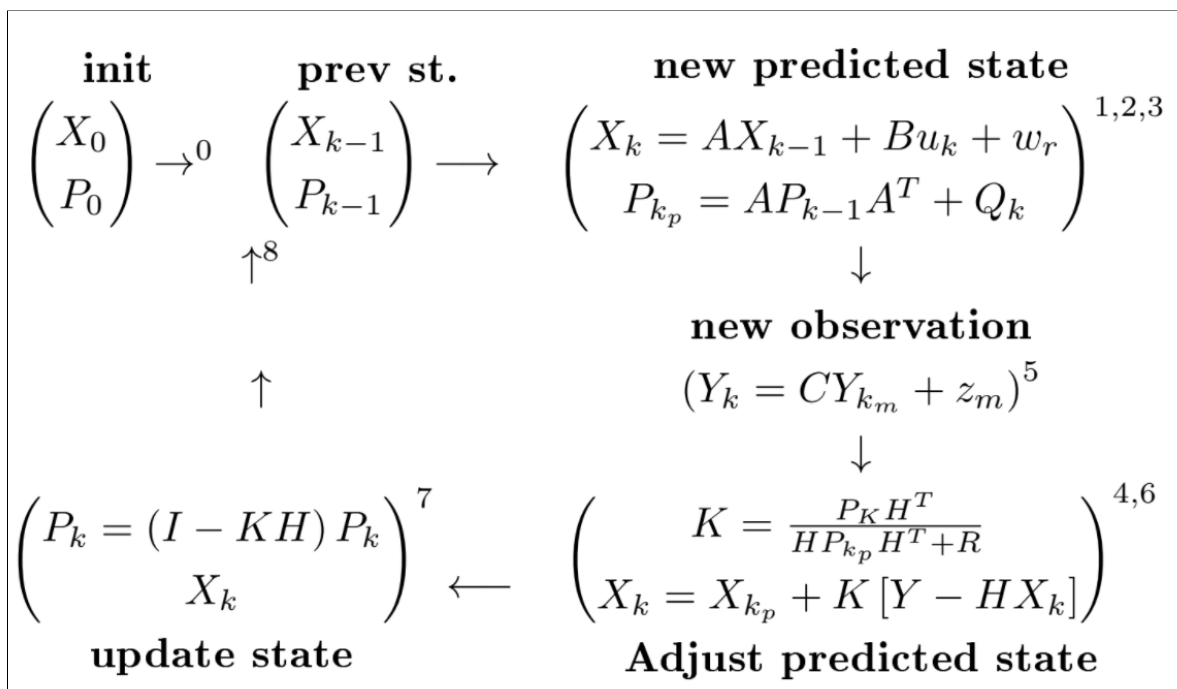
ולבסוף נקבל:

$\frac{1}{90}$	מחסום	$\frac{43}{180}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{7}{180}$	$\frac{8}{45}$
0	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{36}$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Green 2nd time}) &= \left(\frac{2}{45} + \frac{43}{180} + \frac{5}{36} \right) \cdot (0.7) + \left(\frac{1}{90} + \frac{7}{180} + \frac{8}{45} + \frac{7}{20} \right) \cdot (0.2) = \\ &= \frac{37}{90} \end{aligned}$$

מסנן קלמן - חישוב מטריצות ופעולות מהאלגוריתם

שלב	משוואות	הסבר
1	$\begin{pmatrix} X_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$	שלב האתחול: בדרך כלל יהיה כתוב במבחן "בנקודה מסוימת וקטור המצב הינו נראה כך..."
2	$\begin{pmatrix} X_{k-1} \\ P_{k-1} \end{pmatrix}$	שלב המצב הקודם: X_{k-1} וקטור המצב הקודם. P_{k-1} - מטריצת אי הוודאות, אם זה תחילת התרגיל, צריך לחשב אותו לפי הנתון "חוסר הוודאות הראשוני במיקום... ובמהירות..".
3	$P_k = FP_{k-1}F^T + Q_k$	שלב הניבוי החדש (חישוב מטריצת אי הוודאות החדשה): P_k היא מטריצת אי הוודאות. F היא מטריצת המעבר עבור מודל תנועה לינארי ממצב k למצב $k+1$. נחשב: $F = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר Δt = הזמן הקבוע. Q_k - היא מטריצת הרעש החיצוני, אם לא נתון לנו רעש חיצוני אז היא שווה ל-0.
	$X_k = FX_{k-1} + Bu_k + w_k$	שלב הניבוי החדש (חישוב מצב הניבוי): X_k - וקטור המצב בשלב הניבוי. B - מטריצת הבקרה - נשתמש בה אם יש לנו תאוצה קבועה $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{pmatrix}$. u_k - וקטור הבקרה - שינויים בתוך המערכת שלא קשורים לווקטור המצב למשל תאוצה/תאוצה/סיבוב ההגה.. w_k - רעש.
4	$Y_k = CX_k + z$	קבלת מדידה חדשה: מעבר ממרחב החיפוש למרחב המצב. C - מטריצת המרה למימד המתאים z - הרעש של המדידה Y_k - וקטור המדידה, בדרך כלל יהיה נתון לנו בסעיף ב' את: "הערכים שנמדדו מהחיפוש..."
5	$K_k = P_k H^T (HP_k H^T + R)^{-1}$	חישוב הגבר קלמן: K_k: כולל מעבר ממרחב המצב למרחב החיפוש H עם תוספת רעש R. R - רעש במדידה, יהיה כתוב "חוסר הדיוק של החיפוש הינו ..." H - היא פונקציית המדידה, זו מטריצה שתיצור טרנספורמציה בין המצב הקיים לבין המידע שאני מקבל מהחיפוש.
	$X_k = X_k + K_k[Y - HX_k]$	חישוב מצב נוכחי - התאמה:
6	$P_k = (I - K_k H)P_k$	שלב העדכון: עדכון אי הוודאות החדשה אחרי המדידה.
	X_k	



מבחן 2018 - מועד א'

שאלה 1

הלכת לדוקטור בעקבות ציפון חודרנית. הדוקטור בחר בך **באקראי** לבצע בדיקת דם הבודקת שפעת חזירים. ידוע סטטיסטית ששפעת זו פוגעת ב-1 מתוך 10,000 אנשים באוכלוסייה. הבדיקה מדויקת ב-99 אחוז במובן שהסתברות ל- false positive היא 1%. הווה אומר שהבדיקה סיווגה בטעות אדם בריא כאדם חולה היא 1%. ההסתברות ל- false negative היא 0 – אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם החולה בשפעת חזירים שהוא בריא. בבדיקה יצאת חיובי (יש לך שפעת).

א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?

ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש-1 מתוך 200 אנשים שחזרו לאחרונה מתאילנד, חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א, מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?

פתרון א'

- מתוך 100 בריאים $\Leftarrow$ 1 חולה ו-99 בריאים.
- מתוך 100 חולים $\Leftarrow$ 100 חולים ו-0 בריאים.

נגדיר את המאורעות הבאות:

- יהי מאורע H - "אתה חולה בשפעת".
- יהי מאורע E - "הבדיקה אומרת שאתה חולה".

כדי לדעת את ההסתברות נעזר בהסתברות בייסיאנית: $\Pr(H | E) = \frac{\Pr(E | H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)}$.

לפי הנתון אפשר לדעת באופן ישיר: $\Pr(H) = \frac{1}{10,000}$, $\Pr(E | H) = 100\% = 1$, נחשב את $\Pr(E)$ ההסתברות שהבדיקה אומרת שאתה חולה לפי ההסתברות השלמה:

$$\Pr(E) = \Pr(H) \cdot \Pr(E|H) + \Pr(H^c) \cdot \Pr(E|H^c)$$

ההסתברות שאתה לא חולה בשפעת היא: $\Pr(H^c) = 1 - \frac{1}{10,000} = \frac{9,999}{10,000} = 0.9999$.

ההסתברות שהבדיקה אומרת שאתה חולה בהינתן שאתה לא חולה היא: $\Pr(E|H^c) = 1\% = \frac{1}{100}$.

ההסתברות שהבדיקה אומרת שאתה חולה לפי ההסתברות השלמה היא:

$$\Pr(E) = \frac{1}{10,000} \cdot 1 + \frac{9,999}{10,000} \cdot \frac{1}{100} \approx 0.010099$$

כעת נציב את כל הנתונים שלנו לפי נוסחת בייס ונקבל:

$$\Pr(H | E) = \frac{\Pr(E | H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)} \approx \frac{1 \cdot \frac{1}{10,000}}{0.010099} \approx \frac{100}{10,099}$$

נחזור על הסתברות בייס:

$\Pr(H | E)$ - זה ההסתברות האפוסטריורית, כלומר ההסתברות של "H" להיות נכון בהינתן ש: "E" נכון.

$\Pr(E | H)$ - זה ההסתברות ה-Likelihood, כלומר ההסתברות של "E" להיות נכון בהינתן ש: "H" נכון.

$\Pr(H)$ - זה ההסתברות האפריורית, כלומר ההסתברות של "H" להיות נכון. זה הידע.

$\Pr(E)$ - ההסתברות של "E" להיות נכון.

פתרון ב'

נגדיר את המאורעות הבאות:

• יהי מאורע H - "חזרת מתאילנד ואתה חולה בשפעת".

• יהי מאורע E - "הבדיקה אומרת שאתה חולה".

כדי לדעת את ההסתברות נעזר בהסתברות בייסיאנית: $\Pr(H | E) = \frac{\Pr(E | H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)}$

$$\Pr(H) = \frac{1}{200}, \quad \Pr(E | H) = 1$$

לפי ההסתברות השלמה נקבל:

$$\begin{aligned} \Pr(E) &= \Pr(H) \cdot \Pr(E|H) + \Pr(H^c) \cdot \Pr(E|H^c) = \\ &= \frac{1}{200} \cdot 1 + \frac{199}{200} \cdot \frac{1}{100} \approx \frac{299}{20,000} \approx 0.01495 \end{aligned}$$

כעת נציב בנוסחת בייס ונקבל:

$$\Pr(H | E) = \frac{\Pr(E | H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)} \approx \frac{1 \cdot \frac{1}{200}}{0.01495} \approx \frac{100}{299} \approx 0.3344$$

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:



אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מדויק (לכל כיוון) ב-90 אחוז.

העולם אינו ציקלי - אם הרובוט מגיע לקיר, הוא נשאר שם.

בדוגמה שלנו, **החיישן הרגיש "אדום" ואז הרובוט זז ימינה. התזוזה הינה מדויקת.**

א. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "אדום"?

ב. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה אינה מדויקת. יש 85% שהרובוט זז אך 15 אחוז שהוא נשאר באותו מקום.

פתרון א'

תחילה ההתפלגות אחידה ולכן:



נתון לנו שהחיישן מדויק ב-90% כלומר בהסתברות 0.9 וגם נתון שהוא הרגיש "אדום".

$$\text{ההסתברות להיות בתא ירוק הוא: } \frac{1}{6} \cdot (1 - 0.9) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$

$$\text{ההסתברות להיות בתא אדום הוא: } \frac{1}{6} \cdot 0.9 = \frac{9}{60}$$

בכל פעם שהחיישן מרגיש צבע מסוים אנחנו נצטרך לחשב את ההסתברויות ולנרמל כדי לקיים שסכום ההסתברות שלנו בעולם יהיה 1.

$$\Sigma = \frac{1+1+1+9+1+9}{60} = \frac{22}{60}$$

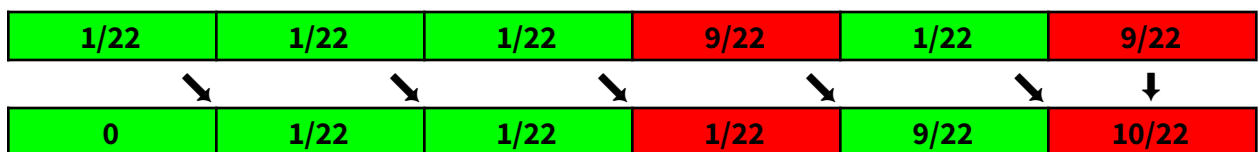
אנו יודעים מהסתברות שסכום כל ההסתברויות במרחב שווה ל-1, ולכן ננרמל בסכום שחישבנו:

$$\text{עבור ההסתברות להיות בתא הירוק נחשב: } \frac{1}{60} \cdot \frac{60}{22} = \frac{1}{22}$$

$$\text{עבור ההסתברות להיות בתא האדום נחשב: } \frac{9}{60} \cdot \frac{60}{22} = \frac{9}{22}$$

$$\text{נראה לבדיקת נכונה שאכן: } \Sigma = \frac{1+1+1+9+1+9}{22} = \frac{22}{22} = 1 \text{ כנדרש.}$$

כעת סיימנו את החלק "שהחיישן הרגיש אדום" ונטפל בחלק בו הוא "זז ימינה" - נזכור כי העולם לא ציקלי:



ומכאן לפי הסתברות השלמה נקבל:

$R = \text{In red cell}$ וגם $SR = \text{Sentient RED 2nd time}$ נגדיר את המאורע

$$\begin{aligned}\Pr(SR) &= \Pr(SR|R) \cdot \Pr(R) + \Pr(SR|\bar{R}) \cdot \Pr(\bar{R}) = \\ &= 0.9 \cdot \left(\frac{1+10}{22}\right) + 0.1 \cdot \left(\frac{1+1+9}{22}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

פתרון ב'

בסעיף א' לפני שלב התזוזה ימינה קיבלנו:

1	2	3	4	5	6
1/22	1/22	1/22	9/22	1/22	9/22

כעת נבצע תזוזה ימינה, על כל תא i בעולם שלנו נחשב:

$$arr[i] = arr[i] \cdot \frac{15}{100} + arr[i-1] \cdot \frac{85}{100}$$

$$\cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{15}{100} + 0 \cdot \frac{85}{100} = \frac{3}{440} \text{ עבור תא ראשון משמאל:}$$

$$\cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{15}{100} + \frac{1}{22} \cdot \frac{85}{100} = \frac{1}{22} \text{ עבור תא שני משמאל:}$$

$$\cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{15}{100} + \frac{1}{22} \cdot \frac{85}{100} = \frac{1}{22} \text{ עבור תא שלישי משמאל:}$$

$$\cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{15}{100} + \frac{1}{22} \cdot \frac{85}{100} = \frac{27}{440} + \frac{17}{440} = \frac{44}{440} \text{ עבור תא רביעי משמאל:}$$

$$\cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{15}{100} + \frac{9}{22} \cdot \frac{85}{100} = \frac{3}{440} + \frac{153}{440} = \frac{156}{440} \text{ עבור תא חמישי משמאל:}$$

$$\frac{9}{22} \cdot \frac{15}{100} + \frac{1}{22} \cdot \frac{85}{100} + \frac{9}{22} \cdot \frac{85}{100} = \frac{27}{440} + \frac{17}{440} + \frac{153}{440} = \frac{197}{440} \text{ עבור תא שישי משמאל:}$$

1	2	3	4	5	6
3/440	1/22	1/22	44/440	156/440	197/440

כעת נחשב את ההסתברות הסופית:

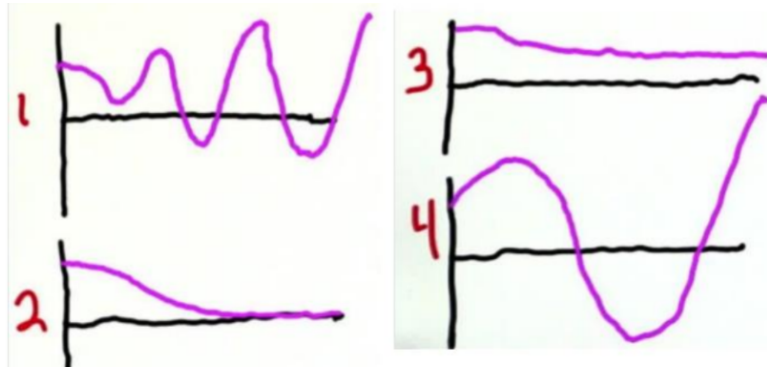
$$\Pr(RED) = \left(\frac{44+197}{440}\right) \cdot \frac{9}{10} + \left(\frac{3+20+20+156}{440}\right) \cdot \frac{1}{10} = \frac{2169}{4400} + \frac{199}{4400} = \frac{148}{275}$$

שאלה 3

נניח שפיתחת בקר PID לשלוט במהירות מכונית. דמיין שאתה נוסע בכביש עמוס ופתאום המכונית שלפניך עצרה בצורה פתאומית.

א. מה סביר שיתרחש במידה ובחרת ערך P גדול מדי ומה סביר שיתרחש במידה ובחרת ערך P קטן מדי?

ב. שימו לב לאיור הבא.



כידוע, בקר PID מכיל רכיב P , רכיב I ורכיב D . באילו מהציורים חסר איזה רכיב? (איזה פרמטר חסר באיור 1, איזה פרמטר חסר באיור 2 וכו')?

פתרון א'

אם בחרנו ב- P גדול מדי אז התנודה תהיה מהירה יותר ואפשר ויכול להיות שנמלט מהתנגשות אך מצד שני יכול להיות שנאבד שליטה וזה גם מסוכן.

אם בחרנו ב- P קטן מדי אז התנודה תהיה איטית וסביר להניח בהסתברות גבוהה נעשה תאונה עם הרכב שעצר ממולנו.

פתרון ב'

1. חסר את D - אם $\tau_d = 0$ אז אנחנו נצפה לתנודות קיצוניות כאלה, כי התפקיד של D הוא לרכך אותם.

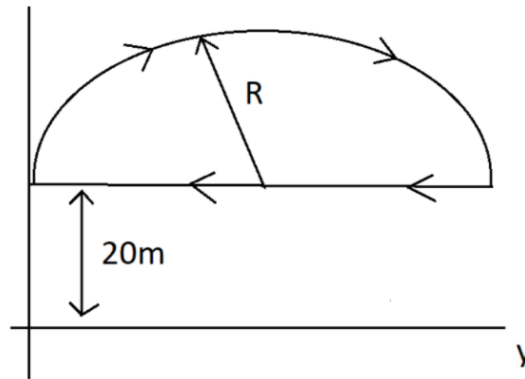
2. לא חסר שום דבר - הרובוט עושה בדיוק מה שצריך. מתחילים הרחק מהמסלול ואז הוא מתקרב ונשאר בדיוק במסלול הייעודי. זה בדיוק מה שאנחנו רוצים ש-PID יעשה.

3. חסר את I - כי הוא מתכנס ל- $y = 0$. הקו לא בדיוק על המסלול כיוון שאנחנו מגיעים למצב יציב שבו הרובוט נסחף כלפי מעלה.

4. חסר את P - הרובוט מתחיל כשהוא עולה למעלה, אין מונח ראשוני שמנווט את הרובוט לעבר המטרה ככל שאנו צוברים שגיאות אנחנו נתקן ונרד למטה, אבל בסופו של דבר אנו נכנסים לסוג כזה של התנהגות תנודה.

שאלה 4

נתון המסלול הבא (מדובר בחצי עיגול בעל רדיוס R). כתבו בבקשה פסודו קוד על מנת לתקן את ה-CTE.

**פתרון**

if $car.y < 20m$ then:

$$CTE = 20 - car.y$$

else if $car.y > 20m$ then:

$$CTE = \sqrt{(car.x - R)^2 + (car.y - 20)^2} - R$$

הערה: ייתכן טעות בקוד.

שאלה 5

בשיעור למדנו על יעקוביאן של מסנן קלמן מורחב - EKF. כמו כן, ראינו שבמקרה של חיישן רדאר אשר מדווח

על הגדלים $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}$, מטריצת היעקוביאן תראה כך:

$$H_j = \begin{bmatrix} \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{p_y}{p_x^2 + p_y^2} & \frac{p_x}{p_x^2 + p_y^2} & 0 & 0 \\ \frac{p_y(v_x p_y - v_y p_x)}{(p_x^2 + p_y^2)^{3/2}} & \frac{p_x(v_y p_x - v_x p_y)}{(p_x^2 + p_y^2)^{3/2}} & \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \end{bmatrix}$$

נניח שהחיישן היה מספק את הערכים הבאים: $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ p_y \end{pmatrix}$ במצב זה, בנה שוב את מטריצת היעקוביאן.

תזכורת, וקטור המצב של המערכת נראה כך: $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

- א.** מה אמורים להיות הממדים של מטריצת היעקוביאן החדשה?
ב. כתוב את המטריצה בשלמות. ניתן כמובן להיעזר במטריצה המסופקת.

פתרון א'

הגודל של המטריצה החדשה היא פשוט 3×4 .

פתרון ב'

נתאים את הוקטורים למטריצת היעקוביאן:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

המטריצה מסודרת בצורה הבאה:

$$H_j = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_3}\right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_4}\right] \\ \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_3}\right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_4}\right] \\ \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_1}\right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_2}\right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_3}\right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_4}\right] \end{pmatrix}$$

נציב במטריצה את הפרמטרים בהתאם:

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial p_x} \right] & \left[\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial p_y} \right] & \left[\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial v_x} \right] & \left[\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial v_y} \right] \\ \left[\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial p_x} \right] & \left[\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial p_y} \right] & \left[\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial v_x} \right] & \left[\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial v_y} \right] \\ \left[\frac{\partial p_y}{\partial p_x} \right] & \left[\frac{\partial p_y}{\partial p_y} \right] & \left[\frac{\partial p_y}{\partial v_x} \right] & \left[\frac{\partial p_y}{\partial v_y} \right] \end{pmatrix} =$$

נגזור את הפרמטרים הנתונים:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, (\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}, \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v', \left(\frac{v}{c}\right)' = \frac{v'}{c}$$

נזכור נוסחאות גזירה:

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{2p_x}{2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \right] & \left[\frac{2p_y}{2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \right] & [0] & [0] \\ \left[\frac{-\frac{p_y}{p_x^2} \cdot 1}{\frac{p_x^2 + p_y^2}{p_x^2}} \right] & \left[\frac{\frac{1}{p_x}}{\frac{p_x^2 + p_y^2}{p_x^2}} \right] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] & [0] \end{pmatrix} =$$

לסיכום קיבלנו:

$$= \begin{pmatrix} \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{p_y}{p_x^2 + p_y^2} & \frac{p_x}{p_x^2 + p_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מבחן 2019 - מועד א'

שאלה 1

א. בדיוק 20% מהתושבים בעיר סובלים ממחלת הצרצרים. יש שתי בדיקות לבדוק את הנוכחות של המחלה הזו, בדיקה X ובדיקה Y. כאשר אתם הולכים לרופא, ב-2/3 מהמקרים הוא יבדוק אתכם עם בדיקה X ובשליש מהמקרים, הוא יבדוק אתכם עם בדיקה Y. הסטטיסטיקה של בדיקה X היא כדלקמן: אם יש לך את המחלה, אזי 75% שהבדיקה תצא חיובית (ו-25% שלילית) ואם אין לך את המחלה, הבדיקה תצא שלילית ב-75% וחיובית רק ב-25%. הסטטיסטיקה של בדיקה Y היא כדלקמן: אם יש לך את המחלה, הבדיקה תצא חיובית עם הסתברות של 100%. אם אין לך את המחלה, הבדיקה תצא חיובית עם הסתברות של 50%. בן אדם נדגם באקראי מתוך האוכלוסייה בעיר ונשלח לבדיקה מחלת הצרצרים אצל הדוקטור. התוצאה היא חיובית. מה ההסתברות שיש לו את מחלת הצרצרים ולמה?

ב. אחרי שבסעיף א, הבדיקה יצאה חיובית, אותו אדם נבדק **פעם שניה** לפי בדיקה מספר X ויוצא (שוב) שהוא חולה. מה ההסתברות הנוכחית שהוא חולה?

פתרון א'

תחילה נפשט את הנתונים:

- עבור בדיקה X:
 - אם אתה חולה במחלה, אז 75% שהבדיקה תצא חיובית ו-25% שלילית.
 - אם אתה לא חולה במחלה, אז 25% שהבדיקה תצא חיובית ו-75% שלילית.
- עבור בדיקה Y:
 - אם אתה חולה במחלה, אז 100% שהבדיקה תצא חיובית ו-0% שלילית.
 - אם אתה לא חולה במחלה, אז 50% שהבדיקה תצא חיובית ו-50% שלילית.

נגדיר את המאורעות:

- *Sick* המאורע שהאדם חולה במחלת הצרצרים.
- *Positive* האדם קיבל תשובה חיובית בבדיקה.
- X האדם נבדק בבדיקה X.
- Y האדם נבדק בבדיקה Y.

נשים לב שהמאורעות זרים כלומר $\Pr(X|Y) = 0$, $\Pr(Y|X) = 0$ ולכן צריך לחשב עבור כל בדיקה בנפרד. נרצה לחשב:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, X) + \Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, Y)$$

נחשב את ההסתברות האלה לפי הסתברות בייסיאנית עבור 3 מאורעות:

עבור מאורעות A, B, C ההסתברות הבייסיאנית היא:

$$\Pr(A | B, C) = \frac{\Pr(B | A, C) \cdot \Pr(A | C)}{\Pr(B | C)} = \frac{\Pr(B | A, C) \cdot \Pr(A, C)}{\Pr(B, C)}$$

עבור בדיקה X : לפי הסתברות בייס לשלוש מאורעות:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, X) = \frac{\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, X) \cdot \Pr(\text{Sick}, X)}{\Pr(\text{Positive}, X)}$$

- ההסתברות שהאדם קיבל תשובה חיובית בבדיקה בהינתן שהוא חולה וגם נבדק בבדיקה X :

$$\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, X) = 0.75$$

- נשים לב שהמאורעות Sick, X בלתי תלויים ולכן, שההסתברות שהאדם חולה וגם נבדק בבדיקה X :

$$\Pr(\text{Sick}, X) = \Pr(\text{Sick}) \cdot \Pr(X) = 0.2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

- נשים לב שהמאורעות $\text{Positive}, X$ כן תלויות אחת בשני כי ההסתברות לבדיקה חיובית תלויה בבדיקה X , אך מאחר וחסר לנו פרטים נוספים לחישוב ההסתברות שהבדיקה חיובית וגם נבדק בבדיקה X , אז נשתמש בהסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Positive}, X) &= \Pr(\text{Positive}, X | \text{Sick}) \Pr(\text{Sick}) + \Pr(\text{Positive}, X | \overline{\text{Sick}}) \Pr(\overline{\text{Sick}}) = \\ &= 0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot (1 - 0.2) = 0.35 \end{aligned}$$

לכן, עבור בדיקה X נקבל:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, X) = \frac{\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, X) \cdot \Pr(\text{Sick}, X)}{\Pr(\text{Positive}, X)} = \frac{0.75 \cdot \frac{2}{15}}{0.35} = 0.285$$

עבור בדיקה Y : לפי הסתברות בייס לשלוש מאורעות:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, Y) = \frac{\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, Y) \cdot \Pr(\text{Sick}, Y)}{\Pr(\text{Positive}, Y)}$$

- ההסתברות שהאדם קיבל תשובה חיובית בבדיקה בהינתן שהוא חולה וגם נבדק בבדיקה Y :

$$\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, Y) = 1$$

- נשים לב שהמאורעות Sick, Y בלתי תלויים ולכן, שההסתברות שהאדם חולה וגם נבדק בבדיקה Y :

$$\Pr(\text{Sick}, Y) = \Pr(\text{Sick}) \cdot \Pr(Y) = 0.2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

- נשים לב שהמאורעות $\text{Positive}, Y$ כן תלויות אחת בשני כי ההסתברות לבדיקה חיובית תלויה בבדיקה Y , אך מאחר וחסר לנו פרטים נוספים לחישוב ההסתברות שהבדיקה חיובית וגם נבדק בבדיקה Y , אז נשתמש בהסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Positive}, Y) &= \Pr(\text{Positive}, Y | \text{Sick}) \Pr(\text{Sick}) + \Pr(\text{Positive}, Y | \overline{\text{Sick}}) \Pr(\overline{\text{Sick}}) \\ &= 1 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot (1 - 0.2) = 0.6 \end{aligned}$$

לכן, עבור בדיקה Y נקבל:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, Y) = \frac{\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, Y) \cdot \Pr(\text{Sick}, Y)}{\Pr(\text{Positive}, Y)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{15}}{0.6} = 0.111$$

לכן, עבור סעיף א' נקבל:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, X) + \Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, Y) = 0.285 + 0.111 = 0.396$$

פתרון סעיף ב' - אחרי שבסעיף א, הבדיקה יצאה חיובית, אותו אדם נבדק **פעם שניה** לפי בדיקה מספר X ויוצא (שוב) שהוא חולה. מה ההסתברות הנוכחית שהוא חולה?

נגדיר את המאורעות:

- Sick - האדם חולה במחלה וגם הוא נבדק בפעם הקודמת וקיבל תשובה חיובית.
- Positive - הבדיקה יצאה חיובית.
- X - האדם נבדק בבדיקה מסוג X .

נחשב לפי הסתברות בייסיאנית ל-3 מאורעות: $\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, X) = \frac{\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, X) \cdot \Pr(\text{Sick}, X)}{\Pr(\text{Positive}, X)}$

- המאורעות להיות חולה וגם להיבדק בבדיקה X בלתי תלויים, לכן:

$$\Pr(\text{Sick}, X) = \Pr(\text{Sick}) \cdot \Pr(X) = 0.396 \cdot \frac{2}{3} = 0.264$$

- ההסתברות לתשובה חיובית בהינתן שהאדם חולה וגם נבדק בבדיקה X היא:

$$\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, X) = 0.75$$

- ההסתברות לבדיקה חיובית וגם הבדיקה בוצעה מסוג X היא:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Positive}, X) &= \Pr(\text{Positive}, X | \text{Sick}) \Pr(\text{Sick}) + \Pr(\text{Positive}, X | \bar{\text{Sick}}) \Pr(\bar{\text{Sick}}) = \\ &= 0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot (1 - 0.2) = 0.35 \end{aligned}$$

לכן נקבל בסה"כ:

$$\Pr(\text{Sick} | \text{Positive}, X) = \frac{\Pr(\text{Positive} | \text{Sick}, X) \cdot \Pr(\text{Sick}, X)}{\Pr(\text{Positive}, X)} = \frac{0.75 \cdot 0.264}{0.35} = 0.565$$

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:



אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:

במידה והחיישן מרגיש אדום - אדום - 80%. ירוק - 20%.

במידה והחיישן מרגיש ירוק - ירוק - 70% צהוב - 30%.

במידה והחיישן מרגיש צהוב - ירוק - 30%. אדום - 60%. צהוב - 10%.

העולם הוא ציקלי.

בדוגמה שלנו, **החיישן הרגיש "אדום" ואז הרובוט זז ימינה. התזוזה הינה מדויקת.**

א. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

ב. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה אינה מדויקת. יש 70% שהרובוט זז משבצת אחת ימינה אך 30% שהרובוט זז **שתי משבצות** ימינה.

פתרון

שלב האתחול: מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט, המרחב בהסתברות אחידה.



שלב החישה: החיישן הרגיש אדום.

• אם הרובוט במשבצת צהובה אז $\frac{1}{4} \cdot 0.6 = \frac{3}{20}$

• אם הרובוט במשבצת ירוקה אז $\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$

• אם הרובוט במשבצת אדומה אז $\frac{1}{4} \cdot 0.8 = \frac{1}{5}$

ננרמל: $\Sigma = 2 \cdot 0 + \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

• אם הרובוט במשבצת צהובה אז $\frac{3}{20} \cdot \frac{20}{7} = \frac{3}{7}$

• אם הרובוט במשבצת ירוקה אז 0

• אם הרובוט במשבצת אדומה אז $\frac{1}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{4}{7}$

נקבל:



שלב התנועה: הרובוט זז ימינה.
נשים לב כי העולם הוא ציקלי והתזוזה מדויקת.

0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{4}{7}$
---	---------------	---	---------------

נשאל: מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

$$(0)(0.2) + (0)(0.3) + \left(\frac{7}{7}\right)(0.7) = \frac{7}{10}$$

פתרון 2: פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה אינה מדויקת. יש 70% שהרובוט זז משבצת אחת ימינה אך 30% שהרובוט זז **שתי משבצות** ימינה.

נחזור שלב לפני התנועה מסעיף 1.

$\frac{3}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	0
---------------	---	---------------	---

נזוז ימינה:

$0.3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{35}$	$0.7 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{10}$	$0.3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{70}$	$0.7 \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{5}$
--	--	--	---------------------------------------

נשאל: מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

$$\left(\frac{9}{70}\right)(0.2) + \left(\frac{6}{35}\right)(0.3) + \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\right)(0.7) = \frac{397}{700}$$

שאלה 3

בשיעור ראינו איך עובדים עם מטריצת היעקוביאן עבור חיישן מסוג ראדר. עם זאת, ניתן לעבוד איתה גם עבור פונקציית המעבר F . נניח שוקטור המצב הוא כולל שלושה נתונים: x, y, θ . המעבר בין המצבים מוגדר כך:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \cos\phi \\ y + \sin\phi \\ \phi \end{pmatrix}$$

עבור המעבר הזה, בנה את מטריצת היעקוביאן.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \cos(\phi) \\ y + \sin(\phi) \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right] \\ \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_3} \right] \\ \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_3} \right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial x + \cos(\phi)}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial x + \cos(\phi)}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial x + \cos(\phi)}{\partial \phi} \right] \\ \left[\frac{\partial y + \sin(\phi)}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial y + \sin(\phi)}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial y + \sin(\phi)}{\partial \phi} \right] \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & \cos(\phi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

הסבר את המונחים הבאים ותן דוגמה (מקסימום 3 שורות לכל מושג).

- גנוטייפ
- פנוטייפ
- רכיב ה-D בבקר PID
- משמעות היעקוביאן
- השערת מרקוב

(גנוטייפ ופנוטייפ לא נלמדו הסמסטר).

פתרון:**רכיב D :**

אחד מן רכיבי בקר השליטה PID, אשר תפקידו לחשב את הנגזרת החלקית של השגיאות הפרופורציונאליות הנעשות על ידי P כפונקציה של זמן. ככלל - ככל שערך ה-D עולה - כך גם קטנה האפשרות ל Under Shoot. הוא נוגד את הנטייה של רכיב P לחרוג מהקו המרכזי. יעזור לעשות את השינויים בצורה חלקה.

משמעות מטריצת היעקוביאן :

הכללה של טור טיילור המבצעת טרנספורמציה לינארית ממרחב המצב למרחב העיתידי אשר אופן המעבר אינו ליניארי. כמו כן הינה מבצעת טרנספורמציה ממרחב המצב למרחב המדידה כאשר המדדים אינם ליניאריים. על ידי חישוב הנגזרות החלקיות לכל פרמטר בווקטור המצב, המטריצה מספקת קירוב לינארי לפונקציות שאינן לינאריות.

השערת מרקוב :

השערת מרקוב עבור תהליכים אקראיים (סטוכסטיים) מתבססת על העובדה שניתן לתאר את מיקום המצב הנוכחי על סמך ידיעת ההסתברות להמצאות המצב הקודם וההסתברות להגעה מהמצב הקודם למצב הנוכחי.

מבחן 2019 - מועד ב'

שאלה 1

א. כל התוצרת של מפעל מסוים מגיעה משלוש מכונות בלבד. מכונה א' אחראית על 20% מהתפוקה. מכונה ב' אחראית על 30% מהתפוקה ומכונה ג' אחראית על 50%. אחוז היחידות הפגומות הינו 5% עבור מכונה א', 3% עבור מכונה ב' ו-1% עבור מכונה ג'. אם פריט נבחר באקראי מהמחסן ומתגלה שהוא פגום, מה ההסתברות שהוא נוצר על ידי מכונה ג'?

ב. מה ההסתברות שהוא נוצר על ידי מכונה ב'?

פתרון א'

נגדיר מאורע E להיות "פריט שנבחר הוא פגום".

נגדיר מאורע H להיות "הפריט נוצר על ידי מכונה ג'".

$$\Pr(E) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.01 = \frac{3}{125}$$

נחשב בעזרת ההסתברות המותנית:

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(H \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{0.5 \cdot 0.01}{\frac{3}{125}} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{3}{125}} = \frac{5}{24} \approx 0.2083$$

פתרון ב'

נגדיר מאורע E להיות "פריט שנבחר הוא פגום".

נגדיר מאורע H להיות "הפריט נוצר על ידי מכונה ב'".

$$\Pr(E) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.01 = \frac{3}{125}$$

נחשב בעזרת ההסתברות המותנית:

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(H \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{0.3 \cdot 0.03}{\frac{3}{125}} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{3}{125}} = \frac{3}{8} = 0.375$$

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:



אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:

במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החיישן ידווח אדום בהסתברות של 80%. ירוק - 20%.

במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החיישן ידווח ירוק בהסתברות של 70%. צהוב - 30%.

במידה והרובוט נמצא על משבצת צהובה - ירוק 30%. צהוב - 60%. צהוב - 10%.

העולם אינו ציקלי.

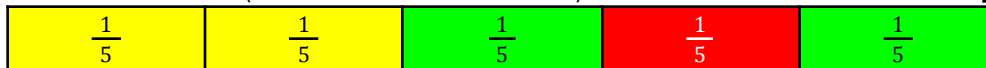
בדוגמה שלנו, החיישן הרגיש "צהוב" ואז הרובוט זז ימינה. התזוזה הינה מדויקת.

א. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

ב. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה אינה מדויקת. יש 70% שהרובוט זז משבצת אחת ימינה אך 30% שהרובוט לא זז בכלל. (אם הרובוט נמצא במשבצת הימנית, ההסתברות שהוא יישאר שם הינה 100%).

פתרון א'

שלב האתחול: מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה על המרחב).



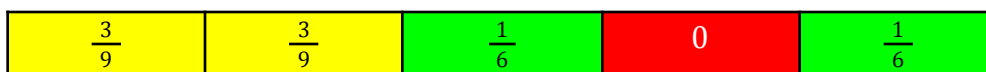
שלב החישה: החיישן הרגיש "צהוב".

- אם הרובוט בתא הצהוב אז: $\frac{1}{5} \cdot 0.6 = \frac{3}{25}$
- אם הרובוט בתא הירוק אז: $\frac{1}{5} \cdot 0.3 = \frac{3}{50}$
- אם הרובוט בתא האדום אז: $\frac{1}{5} \cdot 0 = 0$

$$\text{ננרמל: } \Sigma = 2 \cdot \frac{3}{25} + 2 \cdot \frac{3}{50} + 0 = \frac{9}{25}$$

- אם הרובוט בתא הצהוב אז: $\frac{3}{25} \cdot \frac{25}{9} = \frac{3}{9}$
- אם הרובוט בתא הירוק אז: $\frac{3}{50} \cdot \frac{25}{9} = \frac{1}{6}$
- אם הרובוט בתא האדום אז: $0 \cdot \frac{5}{2} = 0$

נקבל:



שלב התנועה: הרובוט זז ימינה.
נשים לב כי העולם לא ציקלי, בנוסף התזוזה מדויקת.

0	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
---	---------------	---------------	---------------	---------------

נשאל: ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

$$\left(\frac{1}{6}\right)(0.2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0.7) + \left(\frac{3}{9}\right)(0.3) = \frac{29}{60}$$

פתרון ב' - פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה אינה מדויקת. יש 70% שהרובוט זז משבצת אחת ימינה אך 30% שהרובוט לא זז בכלל. (אם הרובוט נמצא במשבצת הימנית, ההסתברות שהוא יישאר שם הינה 100%).

$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
---------------	---------------	---------------	---	---------------

נחזור לשלב החישה:

$0.3 \cdot \frac{3}{9}$	$0.7 \cdot \frac{3}{9} + 0.3 \cdot \frac{3}{9}$	$0.7 \cdot \frac{3}{9} + 0.3 \cdot \frac{1}{6}$	$0.7 \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
-------------------------	---	---	-------------------------	---------------

לאחר חישובי סכימה נקבל:

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{1}{6}$
----------------	---------------	-----------------	----------------	---------------

נשאל: ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

$$\left(\frac{7}{60}\right)(0.2) + \left(\frac{17}{60} + \frac{1}{6}\right)(0.7) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)(0.3) = \frac{281}{600}$$

שאלה 3

עבור מסנן קלמן בעל וקטור המצב הבא: $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ Vx \\ Vy \end{pmatrix}$, נתון שיש חיישן המודד את הפרמטרים הבאים: $\begin{pmatrix} 2x + y - Vy \\ 5Vy - 10z \\ \frac{x+y+z}{3} \end{pmatrix}$.
בנה את מטריצת H .

פתרון

$$\mu_{Expected} = H_k \cdot X_k$$

נתאים את הוקטורים בהתאם:

$$X_k = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ Vx \\ Vy \end{pmatrix}, \quad \mu_{Expected} = \begin{pmatrix} 2x + y - Vy \\ 5Vy - 10z \\ \frac{x + y + z}{3} \end{pmatrix}$$

נציב בנוסחה:

$$H_k \cdot X_k = \mu_{Expected}$$

$$H_k \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ Vx \\ Vy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - Vy \\ 5Vy - 10z \\ \frac{x + y + z}{3} \end{pmatrix}$$

נבנה את H_k בהתאם לוקטורים:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ Vx \\ Vy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - Vy \\ 5Vy - 10z \\ \frac{x + y + z}{3} \end{pmatrix}$$

לסיום קיבלנו:

$$H_k = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

תזכורת מההרצאות:

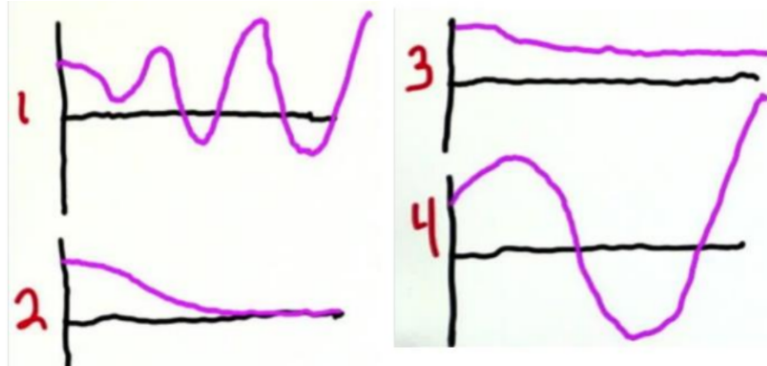
נרצה ליצור טרנספורמציה בין המצב הקיים לבין המידע שאני מקבל, נעשה זאת על ידי מטריצה H_k .

שאלה 4

נניח שפיתחת בקר PID לשלוט במהירות מכונית. דמיין שאתה נוסע בכביש עמוס ופתאום המכונית שלפניך עצרה בצורה פתאומית.

א. מה סביר שיתרחש במידה ובחרת ערך P גדול מדי ומה סביר שיתרחש במידה ובחרת ערך P קטן מדי?

ב. שימו לב לאיור הבא.



כידוע, בקר PID מכיל רכיב P , רכיב I ורכיב D . באילו מהציורים חסר איזה רכיב? (איזה פרמטר חסר באיור 1, איזה פרמטר חסר באיור 2 וכו')?

(שאלה חוזרת).**פתרון א'**

אם בחרנו ב- P גדול מדי אז התנודה תהיה מהירה יותר ואפשר ויכול להיות שנמלט מהתנגשות אך מצד שני יכול להיות שנאבד שליטה וזה גם מסוכן.

אם בחרנו ב- P קטן מדי אז התנודה תהיה איטית וסביר להניח בהסתברות גבוהה נעשה תאונה עם הרכב שעצר ממולנו.

פתרון ב'

1. חסר את D - אם $\tau_d = 0$ אז אנחנו נצפה לתנודות קיצוניות כאלה, כי התפקיד של D הוא לרכז אותם.

2. לא חסר שום דבר - הרובוט עושה בדיוק מה שצריך. מתחילים הרחק מהמסלול ואז הוא מתקרב ונשאר בדיוק במסלול הייעודי. זה בדיוק מה שאנחנו רוצים ש-PID יעשה.

3. חסר את I - כי הוא מתכנס ל- $y = 0$. הקו לא בדיוק על המסלול כיוון שאנחנו מגיעים למצב יציב שבו הרובוט נסחף כלפי מעלה.

4. חסר את P - הרובוט מתחיל כשהוא עולה למעלה, אין מונח ראשוני שמנווט את הרובוט לעבר המטרה ככל שאנו צוברים שגיאות אנחנו נתקן ונרד למטה, אבל בסופו של דבר אנו נכנסים לסוג כזה של התנהגות תנודה.

שאלה 5

שימו לב לשאלה הבאה. השורה העליונה ירוקה והשורה התחתונה צהובה.

p1	
p2	p3

$$P(\text{sense green}) = 0.8; P(\text{sense yellow}) = 0.2$$

$$P(\text{sense green}) = 0.3; P(\text{sense yellow}) = 0.7$$

Probability to sense "green" on top row is 0.8,
Probability to sense "yellow" on bottom row is 0.7

יש רק שלושה חלקיקים המסודרים לפי הציור. הרובוט הרגיש "צהוב".

א. מה המשקל המנורמל של חלקיק $p1$?

ב. מה המשקל המנורמל של חלקיק $p3$?

פתרון א':

• נתחיל עם הסתברות אחידה על המרחב:

$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

• הרובוט הרגיש "צהוב" לכן:

○ אם הרובוט בתא ירוק אז: $\frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{1}{15}$

○ אם הרובוט בתא צהוב אז: $\frac{1}{3} \cdot 0.7 = \frac{7}{30}$

• ננרמל: $\Sigma = \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{7}{30} = \frac{8}{15}$

○ אם הרובוט בתא ירוק אז: $\frac{1}{15} \cdot \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$

○ אם הרובוט בתא צהוב אז: $\frac{7}{30} \cdot \frac{15}{8} = \frac{7}{16}$

• לכן נקבל:

$\frac{1}{8}$	
$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$

• המשקל המנורמל של חלקיק $p1$ הוא: $\frac{1}{8}$.

פתרון ב': המשקל המנורמל של חלקיק $p3$ הוא: $\frac{7}{16}$.

מבחן 2020 - מועד א'

שאלה 1

בשנת 1995, הוסיפה חברת M&M את הצבע הכחול. עז אז, התפלגות הצבעים בשקית M&M היתה נראית כך:

30% Brown, 20% Yellow, 20% Red, 10% Green, 10% Orange, 10% Tan

לעומת זאת, החל משנת 1995, התפלגות הצבעים נראית כך:

24% Blue, 20% Green, 16% Orange, 14% Yellow, 13% Red, 13% Brown.

לחבר שלכם יש 2 שקיות M&M, אחת משנת 1994 ואחת משנת 1996 והוא לא מוכן לגלות לכם איזו שקית שייכת לאיזו שנה. אבל הוא נותן לכם סוכריה אחת מכל שקית. סוכריה אחת היא צהובה ואחת היא ירוקה. מה הסיכוי שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994?

פתרון: נמצא בפרק "סיכום המבחן" בקובץ הזה עם הסבר מלא וסד"פ.

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:

ירוק	מחסום ####	אדום
אדום	אדום	ירוק
ירוק	אדום	ירוק

אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:

במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החיישן ידווח אדום בהסתברות של 80%. ירוק – 20%

במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החיישן ידווח ירוק בהסתברות 70% ואדום – 30%

העולם ציקלי כלפי מעלה ומטה אך אינו ציקלי כלפי ימין ושמאל. (אם הרובוט הגיע לקיר הימני, הוא לא יוכל ללכת ימינה. מאידך, אם הרובוט הגיע לתא עליון, אם הוא יזוז למעלה, הוא ייצא מהתא התחתון באותה עמודה. שימו לב שהרובוט לא יכול להגיע למשבצת עם המחסום בשום אופן.

בדוגמה שלנו, החיישן הרגיש "ירוק" ואז הרובוט זז ימינה. ולאחר מכן זז למטה. התזוזה הינה מדויקת.

3. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

4. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה למטה אינה ודאית. יש 80% שהרובוט

זז למעלה למטה אבל 20% שהוא נשאר באותו מקום. (התזוזה ימינה ושמאלה עדיין וודאית

ועדיין לא ניתן להיות במחסום)

פתרון: מופיע פתרון עם הסבר מורחב בפרק "סיכום המבחן" בקובץ זה.

שאלה 3

נתון העולם הבא עם 5 חלקיקים.

P1	P2	
P3	P4	P5

ההסתברות "להרגיש" כתום בשורה העליונה הינה 0.7 (0.3 להרגיש ירוק). ההסתברות "להרגיש" ירוק בשורה התחתונה הינה 0.6 (0.4 להרגיש כתום). בהנחה שהרובוט "הרגיש" כתום:

1. מה ההסתברות המנורמלת של חלקיק p_2 ?
2. מה ההסתברות המנורמלת של חלקיק p_4 ?
3. חזור על סעיפים 1-2 כאשר הרובוט "הרגיש" ירוק.

פתרון 1:

- נתחיל עם התפלגות אחידה בין החלקיקים הקיימים:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

- לפי ההנחה, הרובוט "הרגיש" כתום, לכן:

○ אם הרובוט בתא כתום אז: $\frac{1}{5} \cdot 0.7 = \frac{7}{50}$

○ אם הרובוט בתא ירוק אז: $\frac{1}{5} \cdot 0.4 = \frac{2}{25}$

• ננרמל: $\Sigma = 2 \cdot \frac{7}{50} + 3 \cdot \frac{2}{25} = \frac{13}{25}$

○ אם הרובוט בתא כתום אז: $\frac{7}{50} \cdot \frac{25}{13} = \frac{7}{26}$

○ אם הרובוט בתא ירוק אז: $\frac{2}{25} \cdot \frac{25}{13} = \frac{2}{13}$

$\frac{7}{26}$	$\frac{7}{26}$	
$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$

לכן ההסתברות המנורמלת של חלקיק p_2 היא $P_2 = \frac{7}{26}$.

פתרון 2: ההסתברות המנורמלת של חלקיק p_4 היא $P_4 = \frac{2}{13}$.

פתרון 3: חזור על סעיפים 1-2 כאשר הרובוט "הרגיש" ירוק.

- נתחיל עם התפלגות אחידה בין החלקיקים הקיימים:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

- לפי ההנחה, הרובוט "הרגיש" ירוק, לכן:

○ אם הרובוט בתא כתום אז: $\frac{1}{5} \cdot 0.3 = \frac{3}{50}$

○ אם הרובוט בתא ירוק אז: $\frac{1}{5} \cdot 0.6 = \frac{3}{25}$

• ננרמל: $\Sigma = 2 \cdot \frac{3}{50} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{12}{25}$

○ אם הרובוט בתא כתום אז: $\frac{3}{50} \cdot \frac{25}{12} = \frac{1}{8}$

○ אם הרובוט בתא ירוק אז: $\frac{3}{25} \cdot \frac{25}{12} = \frac{1}{4}$

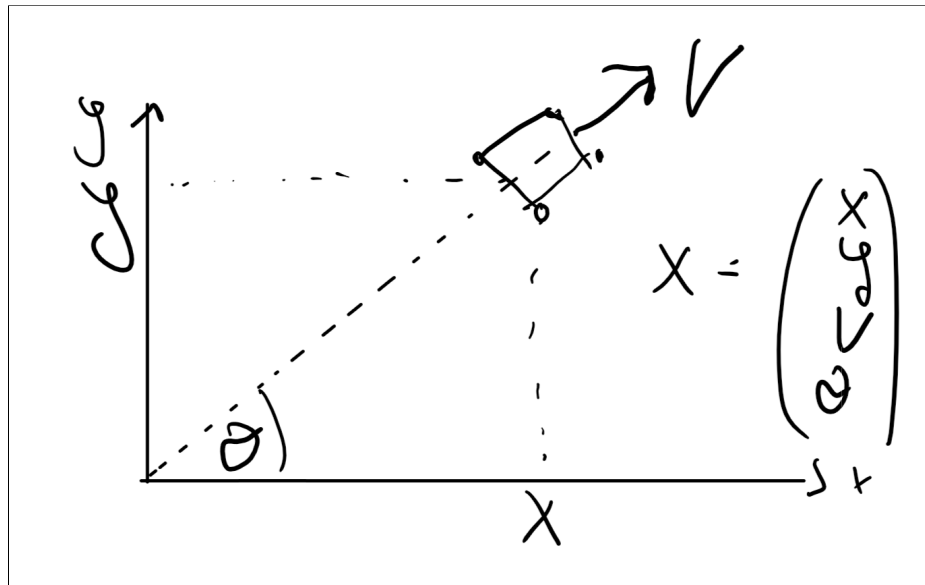
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

לכן ההסתברות המנורמלת של חלקיק p_2 היא $P_2 = \frac{1}{8}$.

לכן ההסתברות המנורמלת של חלקיק p_4 היא $P_4 = \frac{1}{4}$.

שאלה 4

יש צורך לתכנן מסנן קלמן עבור מערכת בעלת ארבעה משתנים – מיקום שני צירים, מהירות כללית וזווית כמו שנראה בציור:



מודל התנועה הינו **מהירות קבועה וללא שינוי בזווית**.

1. כתוב את מטריצת משוואות התנועה עבור כל אחד מהמשתנים בווקטור המצב.
2. כתוב את היעקוביאן
3. בתור מתכנני מערכת, האם עלינו לשאוף להגבר קלמן גבוה או נמוך? פרטו.

פתרון 1:

תחילה נזכור שלמדנו שמודל התנועה ללא שינוי בזווית נראה כך:

$$x_f = x_i + v \cdot \Delta_t \cdot \cos(\theta_0)$$

$$y_f = y_i + v \cdot \Delta_t \cdot \sin(\theta_0)$$

לכן, מטריצת משוואות התנועה עבור כל אחד מהמשתנים בווקטור המצב נראה כך:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \quad x_t = \begin{pmatrix} x_{t-1} + v \Delta_t \cos(\theta) \\ y_{t-1} + v \Delta_t \sin(\theta) \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$$

פתרון 2:

לפי סעיף (1) קיבלנו:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_t = \begin{pmatrix} x_{t-1} + v\Delta_t \cos(\theta) \\ y_{t-1} + v\Delta_t \sin(\theta) \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

נתאים תחילה את הנתונים הנ"ל במטריצת היעקוביאן 4×4 :

$$J = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_4} \right] \\ \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_3} \right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_4} \right] \\ \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_3} \right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_4} \right] \\ \left[\frac{\partial h_4}{\partial x_1} \right] & \left[\frac{\partial h_4}{\partial x_2} \right] & \left[\frac{\partial h_4}{\partial x_3} \right] & \left[\frac{\partial h_4}{\partial x_4} \right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial x_{t-1} + v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial x_{t-1} + v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial x_{t-1} + v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial x_{t-1} + v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial y_{t-1} + v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial y_{t-1} + v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial y_{t-1} + v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial y_{t-1} + v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial v}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial \theta}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} =$$

כעת צריך לגזור לפי כל פרמטר, לכן תחילה נפשט:

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial x_{t-1}}{\partial x} + \frac{v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial x_{t-1}}{\partial y} + \frac{v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial x_{t-1}}{\partial v} + \frac{v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial x_{t-1}}{\partial \theta} + \frac{v\Delta_t \cos(\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial y_{t-1}}{\partial x} + \frac{v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial y_{t-1}}{\partial y} + \frac{v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial y_{t-1}}{\partial v} + \frac{v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial y_{t-1}}{\partial \theta} + \frac{v\Delta_t \sin(\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial v}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial \theta}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} =$$

נגזור ונקבל:

$$= \begin{pmatrix} [1 + 0] & [0 + 0] & [0 + v\Delta_t \cos(\theta)] & [0 + v\Delta_t (-\sin(\theta))] \\ [0 + 0] & [1 + 0] & [0 + \Delta_t \sin(\theta)] & [0 + v\Delta_t \cos(\theta)] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [1] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & v\Delta_t \cos(\theta) & -v\Delta_t \sin(\theta) \\ 0 & 1 & \Delta_t \sin(\theta) & v\Delta_t \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **הערה תיקון:** בתוצאה הסופית $v\Delta_t \cos(\theta)$ בשורה 1 עמודה 3 צריך להיות $\Delta_t \cos(\theta)$.

פתרון 3:

ככל שהחיזוי והמצב הנוכחי (State) מדויק יותר, כך Kalman Gain יהיה קרוב יותר ל-0. לכן, נרצה $KG \rightarrow 0$ וכך החיזוי/שערוך למיקום בצירים יהיה מדויק יותר, כלומר, נרצה לצמצם את חוסר הוודאות.

מבחן 2020 - מועד ב'

שאלה 1

1. בערך $\frac{1}{125}$ מהלידות זה תאומים לא זהים ו- $\frac{1}{300}$ מהלידות זה תאומים זהים. לאלביס היה אח תאום שמת בלידה. מה ההסתברות שלאליביס היה תאום זהה? (ניתן להניח שההסתברות להולדת בן ובת שווה ל- $\frac{1}{2}$).
2. קיים משחק מזל שבו הראשון שמגיע ל-6 ניצחונות לוקח את כל הקופה. שני אנשים משחקים ומצב העניינים הוא 5:3 (לראשון חסר משחק אחד כדי לנצח ולקחת את כל הקופה ולשני חסרים 3 משחקים). המשחק לא יכול להימשך ויש לחלק עכשיו את הקופה. אם רוצים לחלק את הכסף לפי סיכויי הזכייה האמיתיים, מה היחס הנכון לחלק?

פתרון 1 - השאלה יוצאת מנקודת הנחה שתאומים זהים זה מאותו המין, נתון לנו:

1. התאום של אלביס הוא בן.

$$2. \Pr(\text{Boy}) = \Pr(\text{Girl}) = \frac{1}{2}$$

$$3. \Pr(\text{Identical}) = \frac{1}{300} \text{ כלומר זהים}$$

$$4. \Pr(\text{Fraternal}) = \frac{1}{125} \text{ כלומר לא זהים.}$$

• נגדיר את המאורע H - "לאליביס היה אח תאום זהה".

• נגדיר את המאורע E - "היה לאליביס אח תאום".

$$\text{נפתור לפי בייס: } \Pr(H|E) = \frac{\Pr(E|H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)}$$

מאחר ואנחנו יודעים שעבור תאומים זהים זה (G, G) , (B, B) אז:

$$\Pr(E|H) \cdot \Pr(H) = \Pr(\text{Twin Brother} | \text{Identical}) \cdot \Pr(\text{Identical}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300}$$

נחשב לפי ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} \Pr(E) &= \Pr(E|H) \cdot \Pr(H) + \Pr(E|\bar{H}) \cdot \Pr(\bar{H}) = \\ &= \Pr(\text{Twin Brother} | \text{Identical}) \cdot \Pr(\text{Identical}) + \Pr(\text{Twin Brother} | \text{Fraternal}) \cdot \Pr(\text{Fraternal}) \end{aligned}$$

עבור תאומים לא זהים, לאו דווקא שהם לא מאותו המין, האפשרויות עבור לא זהים הם:

$$\Pr(\text{Twin Brother} | \text{Fraternal}) = \frac{1}{4} \text{ ולכן } (B, B), (G, G), (G, B), (B, G)$$

$$\Pr(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{125}$$

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(E|H) \cdot \Pr(H)}{\Pr(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{125}} = \frac{5}{11} \quad \text{לכן נקבל:}$$

פתרון 2

צריך לשאול: אם סדרת המשחקים הייתה נמשכת מהמצב הנוכחי, מה הסיכוי של כל אחד מהשחקנים לנצח את כל המשחק, אם לכל אחד מהם יש הסתברות שווה לזכות בכל שלב.

מהתוצאה 3-5, אחרי עוד 3 משחקים אנחנו בטוח יודעים מי מגיע ראשון ל-6 ניצחונות.

נסמן A עבור השחקן בעל 5 נקודות ו- B עבור השחקן עם 3 נקודות.

נראה את כל התוצאות האפשריות היחידות עבור שלושת המשחקים הבאים:

$AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB$

יש שמונה אפשרויות, כולם סבירים באותה המידה אם ל- A , B יש את אותה ההסתברות לנצח בכל שלב.

בשבע מהתוצאות האלו A מנצח ויש רק תוצאה אחת אפשרית ש- B ינצח שזה BBB .

כלומר, סיכויי הזכייה של A הם $\frac{7}{8}$ וסיכויי הזכייה של B הם $\frac{1}{8}$.

לכן, הם צריכים לפצל את הפרס ביחס 7:1.

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:

אדום	אדום	ירוק
ירוק	אדום	ירוק

אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:

במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החיישן ידווח אדום בהסתברות של 60%. ירוק – 40%

במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החיישן ידווח ירוק בהסתברות 90% ואדום – 10%

העולם **ציקלי כלפי ימין ושמאל אך אינו ציקלי כלפי מעלה ומטה (אם הרובוט הגיע לקיר הימני, הוא יוכל ללכת ימינה ולצאת מהצד השני. מאידך, אם הרובוט הגיע לתא עליון, אם הוא יזוז למעלה, הוא יתקע. התחתון באותה עמודה.**

בדוגמה שלנו, **החיישן הרגיש "ירוק" ואז הרובוט זז ימינה. ולאחר מכן זז למטה. התזוזה הינה מדויקת.**

1. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

2. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה **ימינה** אינה ודאית. יש 80% שהרובוט

זז **ימינה** אבל 20% שהוא זז **שמאלה**. התזוזה למעלה ולמטה ודאית. זכרו: העולם ציקלי ימינה

ושמאלה ואינו ציקלי למעלה ולמטה.

פתרון 1:

שלב האתחול

אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות ולכן המרחב בהסתברות אחידה:

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

שלב החישה

החיישן הרגיש "ירוק":

• אם אני בתא אדום אז $\frac{1}{15} = 0.4 \cdot \frac{1}{6}$

• אם אני בתא ירוק אז $\frac{3}{20} = 0.9 \cdot \frac{1}{6}$

ננרמל: $\Sigma = 3 \cdot \frac{1}{15} + 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$

• אם אני בתא אדום אז $\frac{4}{39} = \frac{1}{15} \cdot \frac{20}{13}$

• אם אני בתא ירוק אז $\frac{3}{13} = \frac{3}{20} \cdot \frac{20}{13}$

נקבל:

$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{4}{39}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{13}$

שלב התנועה: הרובוט זז ימינה ואז למטה כאשר התזוזה מדויקת. נשים לב כי העולם ציקלי עבור התנועות ימין ושמאל ולא ציקלי עבור התנועות למעלה ולמטה.

נזוז ימינה:

$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{39}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{39}$

נזוז למטה:

0	0	0
$\frac{3}{13} + \frac{4}{39} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{13} + \frac{3}{13} = \frac{6}{13}$	$\frac{4}{39} + \frac{4}{39} = \frac{8}{39}$

שאל: מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

$$\left(\frac{6}{13}\right)(0.4) + \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{39}\right)(0.9) = \frac{87}{130}$$

פתרון 2: פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: התזוזה **ימינה** אינה ודאית. יש 80% שהרובוט זז **ימינה** אבל 20% שהוא זז **שמאלה**. התזוזה למעלה ולמטה ודאית. זכרו: העולם ציקלי ימינה ושמאלה ואינו ציקלי למעלה ולמטה.

נחזור לשלב של לפני התנועה בסעיף 1.

$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{4}{39}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{13}$

נזוז ימינה:

$0.2 \cdot \frac{4}{39} + 0.8 \cdot \frac{4}{39}$	$0.8 \cdot \frac{3}{13} + 0.2 \cdot \frac{4}{39}$	$0.2 \cdot \frac{3}{13} + 0.8 \cdot \frac{4}{39}$
$0.2 \cdot \frac{4}{39} + 0.8 \cdot \frac{3}{13}$	$0.8 \cdot \frac{3}{13} + 0.2 \cdot \frac{3}{13}$	$0.2 \cdot \frac{3}{13} + 0.8 \cdot \frac{4}{39}$

כלומר אחרי חישובים של סכימה נקבל:

$\frac{4}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{5}{39}$
$\frac{8}{39}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{39}$

נזוז למטה:

0	0	0
$\frac{4}{39} + \frac{8}{39} = \frac{4}{13}$	$\frac{3}{13} + \frac{8}{39} = \frac{17}{39}$	$\frac{5+5}{39} = \frac{10}{39}$

שאל: מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

$$\left(\frac{17}{39}\right)(0.4) + \left(\frac{22}{39}\right)(0.9) = \frac{133}{195}$$

שאלה 3

במערכת מסוימת, וקטור המצב מוגדר כמיקום ומהירות בחד מימד $(Px \ Vx)$ בנקודה מסוימת וקטור המצב הינו נראה כך: $(300m \ 25m/s)$. המודל הדינמי של המערכת הינו תאוצה קבועה בה התאוצה בציר x הינה $10m/s^2$. קבוע הזמן של המערכת הינו 0.1sec.

חוסר הוודאות הראשוני במיקום (סטיית התקן) 18 מטר לציר X, ו-8 מטר לשנייה במהירות בציר X. מה היא מטריצה B, ו-U? איך נראה וקטור המצב בשלב הבא? (זכור שקבוע הזמן הינו 0.1s).

1. מהי מטריצת P החדשה? מהי מטריצת Q לפי הנתונים המסופקים?

2. קיים חיישן אשר בודק את שני הערכים הבאים:

1. חצי מהמיקום בציר X

2. 3 פעמים המהירות בציר $X (Vx * 3)$

שגיאת החיישן היא 10 מטר בערך הראשון ו-8 מטר לשנייה בערך השני החיישן מדד את הערכים הבאים = $(170m \ 80m/s)$

כתוב את מטריצת H וחשב את וקטור המצב החדש לאחר עדכון ה-UPDATE וגם את מטריצת P החדשה.

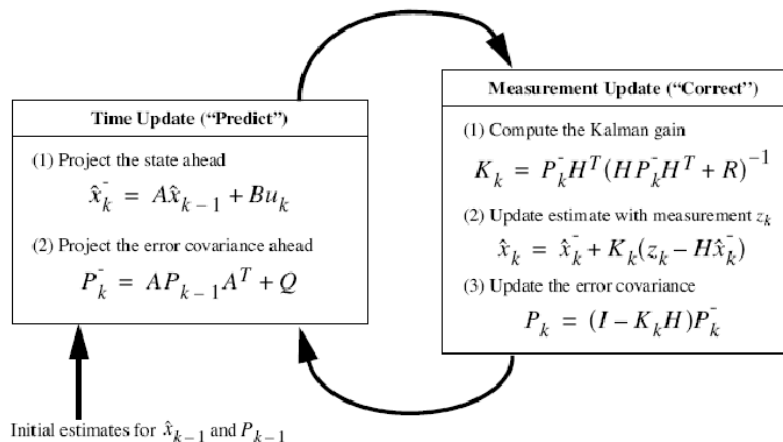
3. חשבו את מטריצת P ואת וקטור המצב X לאחר שלב ה-PREDICTION הראשון. הניחו מודל

תאוצה קבועה (ואל תשכחו את מטריצת Q)

4. חשבו את מטריצת P ואת וקטור המצב X לאחר שלב ה-UPDATE הראשון.

הערה כללית: נא רשמו את כל המשוואות בצורה מסודרת.

מצ"ב משוואות הקלמן למי שצריך:



פתרון תקין, נבדק בפייתון.

פתרון 1

מטריצה F מעבירה ממצב X_{k-1} למצב X_k באמצעות העתקה לינארית.

המטריצה נראית כך:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצה B נקראת "מטריצת הבקרה" עבור תאוצה קבועה:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (0.1)^2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0.01 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

המטריצה U בעצם נקרא "וקטור הבקרה", הוא בעצם מכיל את התאוצה. נתון לנו שיש תאוצה קבועה בה התאוצה בציר x הינה $10m/s^2$.
לכן,

$$U = 10$$

וקטור המצב $(Px \ Vx)$ במצב הבא מוגדר לפי משוואת ה-Prediction:

$$X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot \vec{u}$$

כלומר, השוואה הזאת היא השערוך הטוב ביותר שלנו עבור X_k זה השערוך שנוצר כתוצאה מהמצב הקודם X_{k-1} כולל התיקון של השפעות ידועות שחיצוניות למערכת $B \cdot \vec{u}$ (כמו תאוצה למשל).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Px \\ Vx \end{pmatrix}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 25 \end{pmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} \cdot 10 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 300 + 0.1 \cdot 25 \\ 0 \cdot 300 + 1 \cdot 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 302.55 \\ 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מטריצת P החדשה היא מוגדרת לפי משוואת ה-Prediction:

$$P_k = F_k \cdot P_{k-1} \cdot F_k^T + Q_k$$

ה- P_k מתאר את חוסר הוודאות במערכת שלנו $F_k \cdot P_{k-1} \cdot F_k^T$ יחד עם חוסר וודאות מהסביבה החיצונית שזה אותו ה- Q_k

מאחר ולא נתון לנו דבר על כוח חיצוני שפועל על המערכת אז המטריצה $Q_k = 0$.

מטריצת Q מוסיפה חוסר וודאות בתזוזה. היא בעצם מטריצה שאומרת לנו שיש לנו חוסר וודאות שהוא נוסף לחוסר הוודאות שהיה כבר בתוך המערכת כפי שבא לידי ביטוי במטריצת P הקודמת.

לפני שמחשבים את P_k צריך לחשב קודם את P_{k-1} .

$$P_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta V \\ \Delta V \Delta x & \Delta V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18^2 & 0 \\ 0 & 8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 324 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$$

וכעת נחשב את P_k :

$$\begin{aligned} P_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 324 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 324 \cdot 1 + 0 \cdot 0.1 & 1 \cdot 0 + 0.1 \cdot 64 \\ 0 \cdot 324 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 324 & 6.4 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 324 \cdot 1 + 6.4 \cdot 0.1 & 324 \cdot 0 + 6.4 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 64 \cdot 0.1 & 0 \cdot 0 + 64 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 324.64 & 6.4 \\ 6.4 & 64 \end{bmatrix} = P_k \end{aligned}$$

פתרון 2

כעת צריך לחשב את וקטור המצב החדש X_k לפי העדכון: $X_k = X_k + K_k[Y - HX_k]$.
וגם צריך לחשב את $P_k = (I - K_k H)P_k$ בהתאם.

נציג את מטריצת H :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מטריצת H תיצור טרנספורמציה בין המצב הקיים לבין המידע שאני מקבל מהחיישן.

קבלת המדידה החדשה: $Y_k = C \cdot Y_k + z$.

לפי הנתון, $z = \begin{pmatrix} 170 \\ 80 \end{pmatrix}$ ולכן $Y_k = z = \begin{pmatrix} 170 \\ 80 \end{pmatrix}$.

נחשב את הגבר קלמן: $K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1}$.

לפי הנתון, יש לנו חוסר דיוק של החיישן (שגיאת חיישן) של 10 מטר בערך הראשון ו-8 מטר לשניה בערך השני

$$R = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \text{ ולכן:}$$

מטריצה R - היא מטריצת רעש המדידה שנוצר מהמעבר בין מרחב המצב לבין מרחב החיישן.

נחשב את הגבר קלמן:

$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} = \begin{pmatrix} 324.64 & 6.4 \\ 6.4 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 324.64 & 6.4 \\ 6.4 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 162.32 & 19.2 \\ 3.2 & 192 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 324.64 & 6.4 \\ 6.4 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.895125 & 0.016573 \\ 0.0017677 & 0.299973 \end{pmatrix}$$

כעת צריך לחשב את וקטור המצב החדש X_k לפי העדכון:

$$X_k = X_k + K_k [Y - HX_k] =$$

$$= \begin{pmatrix} 302.55 \\ 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.895125 & 0.016573 \\ 0.0017677 & 0.299973 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 170 \\ 80 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 302.55 \\ 26 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 319.34436 \\ 26.633046 \end{pmatrix}$$

וגם צריך לחשב את:

$$P_k = (I - K_k H) P_k = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.895125 & 0.016573 \\ 0.0017677 & 0.299973 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 324.64 & 6.4 \\ 6.4 & 64 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 179.025108 & 0.353584 \\ 0.353585336 & 6.39952736 \end{pmatrix}$$

$$P_k = \begin{pmatrix} 179.025108 & 0.353584 \\ 0.353585336 & 6.39952736 \end{pmatrix} \quad X_k = \begin{pmatrix} 319.34436 \\ 26.633046 \end{pmatrix} \quad \text{כלומר קיבלנו:}$$

פתרון ג' ו-ד': הם לא רלוונטים, ככל הנראה טעות במבחן.

שאלה 4

(25 נקודות) בשיעור למדנו על היעקובין של מסנן קלמן מורחב – EKF. כמו כן, ראינו שבמקרה של חיישן רדאר אשר מדווח על הגדלים $(\rho \quad \varphi \quad \dot{\rho})$, מטריצת היעקובין תראה כך:

$$H_j = \begin{bmatrix} \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{p_y}{p_x^2 + p_y^2} & \frac{p_x}{p_x^2 + p_y^2} & 0 & 0 \\ \frac{p_y(v_x p_y - v_y p_x)}{(p_x^2 + p_y^2)^{3/2}} & \frac{p_x(v_y p_x - v_x p_y)}{(p_x^2 + p_y^2)^{3/2}} & \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \end{bmatrix}$$

נניח שהחיישן היה מספק את הערכים הבאים: $(\rho \quad \varphi \quad p_y)$ במצב זה, בנה שוב את מטריצת היעקובין. תזכורת, וקטור המצב של המערכת נראה כך: $(p_x \quad p_y \quad v_x \quad v_y)$

1. מה אמורים להיות הממדים של מטריצת היעקובין החדשה?
2. כתוב את המטריצה בשלמות. ניתן כמובן להיעזר במטריצה המסופקת

(זה שאלה חוזרת, מועד א', 2018).

פתרון א'

הגודל של המטריצה החדשה היא פשוט 3×4 .

פתרון ב'

נתאים את הוקטורים למטריצת היעקוביאן:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

המטריצה מסודרת בצורה הבאה:

$$H_j = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_3}\right] & \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_4}\right] \\ \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_3}\right] & \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_4}\right] \\ \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_1}\right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_2}\right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_3}\right] & \left[\frac{\partial h_3}{\partial x_4}\right] \end{pmatrix}$$

נציב במטריצה את הפרמטרים בהתאם:

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial p_x}}{\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial p_x}} \right] & \left[\frac{\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial p_y}}{\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial p_y}} \right] & \left[\frac{\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial v_x}}{\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial v_x}} \right] & \left[\frac{\frac{\partial \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\partial v_y}}{\frac{\partial \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}{\partial v_y}} \right] \\ \left[\frac{\partial p_y}{\partial p_x} \right] & \left[\frac{\partial p_y}{\partial p_y} \right] & \left[\frac{\partial p_y}{\partial v_x} \right] & \left[\frac{\partial p_y}{\partial v_y} \right] \end{pmatrix} =$$

נגזור את הפרמטרים הנתונים:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, (\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}, \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v', \left(\frac{v}{c}\right)' = \frac{v'}{c}$$

נזכור נוסחאות גזירה:

$$= \begin{pmatrix} \left[\frac{\frac{2p_x}{2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}}{\frac{-\frac{p_y}{p_x^2} \cdot 1}{\frac{p_x^2 + p_y^2}{p_x^2}}} \right] & \left[\frac{\frac{2p_y}{2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}}{\frac{\frac{1}{p_x}}{\frac{p_x^2 + p_y^2}{p_x^2}}} \right] & [0] & [0] \\ \left[\frac{0}{1} \right] & \left[\frac{1}{1} \right] & [0] & [0] \end{pmatrix} =$$

לסיכום קיבלנו:

$$= \begin{pmatrix} \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{p_y}{p_x^2 + p_y^2} & \frac{p_x}{p_x^2 + p_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מבחן 2021 - מועד א'

שאלה 1

- א.** לגברת בלמו מהבוריק המפורסם באור יהודה יש שני ילדים. לפחות אחד מהם הוא בן. מה הסיכוי ששני הילדים של גברת בלמו הם בנים?
- ב.** לגברת בלמו יש שני ילדים. הילד הבכור הינו בן. מה הסיכוי ששני הילדים של גברת בלמו הם בנים?
- ג.** לגברת בלמו יש שני ילדים. לפחות אחד מהם הוא בן. אנחנו גם יודעים שהבן הזה נולד ביום חמישי (ההסתברות להיוולד בכל אחד מימות השבוע שווה). איך המידע הזה משנה את תשובתך בסעיף א'?

פתרון א':

נגדיר את המאורע E להיות "לפחות אחד מהילדים של גברת בלמו הוא בן".
נגדיר את המאורע H להיות "שני הילדים של גברת בלמו הם בנים".
נציג את כל האופציות שלנו עבור מאורע E : $\{(B, B), (B, G), (G, B)\}$ כאשר B =בן וגם G =בת.
נרצה לחשב לפי ההסתברות המותנית:

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(H \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{|\{(B, B)\}|}{|\{(B, B), (B, G), (G, B)\}|} = \frac{1}{3}$$

פתרון ב':

נגדיר את המאורע E להיות "הילד הבכור של גברת בלמו הוא בן".
נגדיר את המאורע H להיות "שני הילדים של גברת בלמו הם בנים".
נציג את כל האופציות שלנו עבור מאורע E : $\{(B, B), (B, G)\}$ כאשר B =בן וגם G =בת.
כלומר, יש משמעות לסדר: $(1st\ child, 2nd\ child)$.
נרצה לחשב לפי ההסתברות המותנית:

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(H \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{|\{(B, B)\}|}{|\{(B, B), (B, G)\}|} = \frac{1}{2}$$

פתרון ג'

נגדיר את המאורע E להיות "לפחות אחד מהילדים של גברת בלמו הוא בן והוא נולד ביום חמישי".

נגדיר את המאורע H להיות "שני הילדים של גברת בלמו הם בנים".

נציג את כל האופציות שלנו עבור מאורע E , בשונה מסעיף א', יש לנו מידע נוסף והוא היום בו נולד הילד, מאחר

וההסתברות להיוולד בכל אחד מימות השבוע שווה, אז ניתן להציג את קבוצת המאורע E באופן טבעי:

$$E = \left\{ \forall 1 \leq i \leq 7 : (B_5, B_i) \cap (B_i, B_5) \cap (B_5, G_i) \cap (G_i, B_5) \right\}$$

וגודל המאורע הוא: $|E| = 27$.

נרצה לחשב לפי ההסתברות המותנית:

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(H \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{|\{ \forall 1 \leq i \leq 7 : (B_5, B_i) \cap (B_i, B_5) \}|}{|\{ \forall 1 \leq i \leq 7 : (B_5, B_i) \cap (B_i, B_5) \cap (B_5, G_i) \cap (G_i, B_5) \}|} = \frac{13}{27}$$

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:

	אדום	ירוק	כחול
	אדום	מחסום####	ירוק
	ירוק	אדום	אדום
מחסום####		כחול	ירוק

אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:

במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החיישן ידווח אדום בהסתברות של 80%. ירוק – 10%, כחול – 10%

במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החיישן ידווח ירוק בהסתברות 70% ואדום – 10%, כחול – 20% במידה והחיישן נמצא על משבצת כחולה: החיישן ידווח כחול בהסתברות של 50% וירוק ב-50%.

העולם ציקלי בכל הכיוונים. שימו לב שהרובוט לא יכול להגיע ולא יכול להתחיל במשבצת עם המחסום בשום אופן.

בדוגמה שלנו, **החיישן הרגיש "כחול" ואז הרובוט זז ימינה. ולאחר מכן זז למטה. התזוזה הינה מדויקת.**

א. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "ירוק"?

ב. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: המחסום הינו מחסום קסם וכאשר מגיעים אליו משוגרים לאחת מהמשבצות הכחולות (הסתברות שווה להיות משוגר לכל משבצת כחולה).

פתרון א'

מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט ולכן ההסתברות אחידה בין כל המשבצות:

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	מחסום	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
מחסום	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

נחשב את המקרה בו החיישן הרגיש כחול.

$$\text{עבור משבצת כחולה: } \frac{1}{10} \cdot 0.5 = \frac{1}{20}$$

$$\text{עבור משבצת ירוקה: } \frac{1}{10} \cdot 0.2 = \frac{1}{50}$$

$$\text{עבור משבצת אדומה: } \frac{1}{10} \cdot 0.1 = \frac{1}{100}$$

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{100}$	מחסום	$\frac{1}{50}$
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
מחסום	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$

$$\Sigma = 4 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{1}{50} = \frac{11}{50}$$

$$\cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{50}{11} = \frac{1}{22} \text{ עבור משבצת אדומה:}$$

$$\cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{50}{11} = \frac{5}{22} \text{ עבור משבצת כחולה:}$$

$$\cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{50}{11} = \frac{2}{22} \text{ עבור משבצת ירוקה:}$$

$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{5}{22}$
$\frac{1}{22}$	מחסום	$\frac{2}{22}$
$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$
מחסום	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{22}$

הרובוט זז ימינה ואז למטה כאשר התזוזה מדויקת והעולם ציקלי לכל הכיוונים ולכן:

נזוז ימינה:

$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$
$\frac{3}{22}$	מחסום	0
$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$
מחסום	0	$\frac{7}{22}$

נזוז למטה:

0	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{22}$
$\frac{5}{22}$	מחסום	$\frac{2}{22}$
$\frac{4}{22}$	0	0
מחסום	$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$

נשאל מה ההסתברות שהחיישן הרגיש בפעם השניה ירוק?

$$\begin{aligned} & \left(\frac{0+5+0+0}{22} \right) \cdot (0.1) + \left(\frac{1+2+4+1}{22} \right) \cdot (0.7) + \left(\frac{7+2}{22} \right) \cdot (0.5) = \\ & = \left(\frac{5}{22} \right) \cdot (0.1) + \left(\frac{8}{22} \right) \cdot (0.7) + \left(\frac{9}{22} \right) \cdot (0.5) = \\ & = \frac{1}{44} + \frac{14}{55} + \frac{9}{44} = \frac{53}{110} \approx 0.48181... \end{aligned}$$

פתרון ב'

נחזור לשלב התנועה בסעיף א'.

$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{5}{22}$
$\frac{1}{22}$	מחסום	$\frac{2}{22}$
$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$
מחסום	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{22}$

הרובוט זז ימינה ואז זז למטה, רק שעכשיו במידה והגיע למחסום, הרובוט יעבור לאחד המשבצות הכחולות בהסתברות שווה. נזוז ימינה:

$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22} + 0.5 \cdot \frac{1}{22} + 0.5 \cdot \frac{2}{22}$
$\frac{2}{22}$	מחסום	0
$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$
מחסום	$0.5 \cdot \frac{1}{22} + 0.5 \cdot \frac{2}{22}$	$\frac{5}{22}$

לאחר הסכימה:

$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{44}$
$\frac{2}{22}$	מחסום	0
$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{1}{22}$
מחסום	$\frac{3}{44}$	$\frac{5}{22}$

נזוז למטה:

0	$\frac{3}{44}$	$\frac{6}{22}$
$\frac{5}{22}$	מחסום	$\frac{7}{44}$
$\frac{2}{22}$	0	0
מחסום	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{22}$

נשאל מה ההסתברות שהחיישן הרגיש בפעם השניה ירוק?:

$$\left(\frac{5}{22}\right) \cdot (0.1) + \left(\frac{3+7}{44} + \frac{2+1}{22}\right) \cdot (0.7) + \left(\frac{6+3}{22}\right) \cdot (0.5) = \frac{53}{110} \approx 0.48181....$$

שאלה 3

יש לבנות מסנן קלמן למעקב של רובוט במשקל של 5 ק"ג במימד אחד (מיקום ומהירות). וקטור המצב מוגדר כמיקום ומהירות בחד מימד $\begin{pmatrix} Px \\ Vx \end{pmatrix}$

בנקודה מסוימת וקטור המצב הינו נראה כך: $\begin{pmatrix} 30 m \\ 2.5 m/s \end{pmatrix}$. המודל הדינמי של המערכת הינו תאוצה קבועה בה התאוצה בציר x הינה $1 m/s^2$. קבוע הזמן של המערכת הינו 2 sec. חוסר הוודאות הראשוני במיקום הינו 5 מטרים וחוסר הוודאות במהירות הינו 1.2 מטר לשנייה. על המערכת פועל כוח חיצוני של 10 ניוטון (להזכירכם,

החוק השני של ניוטון אומר ש: $F=m*a$ או שהכוח הפועל שווה למכפלת המסה בתאוצה). בנוסף, נתונה מטריצת Q הבאה:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- א. חשבו את מטריצת F ואת וקטור המצב החדש ומטריצת P החדשה ב $t=2sec$. (X, P, F)
 ב. למערכת יש חיישן המודד רק את המיקום ביחידות של סנטימטרים. חוסר הדיוק של החיישן הינו 25 ס"מ. הערך הנמדד מהחיישן ב $t=2$ הינו 370.
 חשבו את מטריצת H, וקטור המצב, הגבר קלמן ומטריצת P לאחר שלב העדכון. (X, P, K, H)

פתרון תקין, נבדק בפייתון.

פתרון א':

נתונים לנו:

$$X_{k-1} = \begin{pmatrix} 30m \\ 2.5 m/s \end{pmatrix}, \quad \Delta t = 2, \quad u_k = 1, \quad P_{k-1} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 1.2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1.44 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נתון לנו שעל המערכת פועל כוח חיצוני של 10 ניוטון, בנוסף נתון לנו שהמסה של הרובוט הוא 5 ק"ג. לכן, $10 = 5 \cdot a \Rightarrow a = 2$, כלומר, יש תאוצה נוספת שהיא 2. לכן התאוצה הכוללת תהיה $u_k = 2 + 1 = 3$.

נחשב את וקטור המצב החדש בשלב זה: $X_k = FX_{k-1} + Bu_k + w_k$

נחשב את מטריצת אי הוודאות החדשה:

$$P_k = FP_{k-1}F^T + Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix}$$

נחשב את מטריצת הבקרה:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2^2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_k = 3$$

לכן נקבל:

$$X_k = FX_{k-1} + Bu_k + w_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30m \\ 2.5 m/s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 3 + 0 = \begin{pmatrix} 41 \\ 8.5 \end{pmatrix}$$

$$X_k = \begin{pmatrix} 41 \\ 8.5 \end{pmatrix} \quad P_k = \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} \quad \text{לסיכום:}$$

פתרון ב':

החיישן מודד רק מיקום ביחידות של סנטימטרים, לכן מאחר ואנו מודדים במטרים אז: $H = (100 \ 0)$.

חוסר הדיוק של החיישן הינו 25 ס"מ ולכן $R = (25^2) = (625)$.

הערך שנמדד מהחיישן הינו 370 ולכן: $Y_k = z = (370)$.

צריך לחשב:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} \\ X_k &= X_k + K_k [Y - H X_k] \\ P_k &= (I - K_k H) P_k \end{aligned}$$

נחשב את הגבר קלמן:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} (100 \ 0)^T \left((100 \ 0) \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} (100 \ 0)^T + (625) \right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 32.76 \\ 2.88 \end{pmatrix} \cdot \left((100 \ 0) \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} (100 \ 0)^T + (625) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.00998095 \\ 0.00087744 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נחשב את וקטור המצב:

$$X_k = X_k + K_k [Y - H X_k] = \begin{pmatrix} 41 \\ 8.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00998095 \\ 0.00087744 \end{pmatrix} \left[(370) - (100 \ 0) \begin{pmatrix} 41 \\ 8.5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3.7710565 \\ 5.2271488 \end{pmatrix}$$

נחשב את מטריצת אי הוודאות החדשה לאחר העדכון:

$$P_k = (I - K_k H) P_k = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00998095 \\ 0.00087744 \end{pmatrix} (100 \ 0) \right) \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0624078 & 0.0054864 \\ 0.00550656 & 2.18729728 \end{pmatrix}$$

$$X_k = \begin{pmatrix} 3.7710565 \\ 5.2271488 \end{pmatrix} \quad P_k = \begin{pmatrix} 0.0624078 & 0.0054864 \\ 0.00550656 & 2.18729728 \end{pmatrix} \quad \text{לסיכום:}$$

שאלה 4

הסבירו בקצרה את המושגים הבאים:

- התפלגות Uni-Modal
- התפלגות לא פרמטרית (בדוגמת מסנן חלקיקים).
- למה אחראי רכיב ה-D בבקר PID?
- בשיעורים דיברנו על **3** הנחות יסוד של מסנן קלמן. מה הם 3 ההנחות?
- מה הסיבוכיות של מסנן היסטוגרמה? למה?

פתרון 4

- **Uni-Modal** - ניחוש אחד (הטוב ביותר) המשקלל את האפשרויות, הניחוש רציף, לכן אפשר להיות בכל מקום.
- **התפלגות לא פרמטרית** - אנחנו יכולים לתאר התפלגות שרירותית בצורה לא פרמטרית ע"י נקודות (חלקיקים). על ציר ה-x נגדיר את המשקלים (גודל ההסתברות) בכל נקודה בפונקציה. הגודל של החלקיק יתאר לנו את ההסתברות להיות באותו מקום לפי ההתפלגות השרירותית וככל שיהיו לנו יותר חלקיקים, כך ההתפלגות שנתאר תהיה יותר מדויקת.
- **רכיב D** - זה הרכיב המרסן, ה-P מבטל את התנועה הסינוסית, ה-D מרסן כי הוא לוקח את השינוי "הדיפרנציאל" בין המצב הנוכחי לקודם ואז הוא מרסן את התנועה. הוא נוגד את הנטייה של רכיב P לחרוג מהקו המרכזי. יעזור לעשות את השינויים בצורה חלקה.
- **3 הנחות היסוד של מסנן קלמן הם:**
 1. רעש ממוצע סביב 0.
 2. טרנספורמציה לינארית משלב לשלב.
 3. בחירה יחידה Unimodal לפי התפלגות גאוס.
- **הסיבוכיות של מסנן היסטוגרמה:** אקספוננציאלי כי ככל שאנחנו עולים במימדים, אנחנו צריכים להכפיל את רמת החלקיקים (התאים) שלנו פי פקטור. למשל שאני במימד אחד ואזור העניין שלי הוא 100 מטר.
 - רזולוציה של חד-מימד: 100^1 תאים.
 - רזולוציה של דו-מימד: $10,000 = 100^2$ תאים.
 - רזולוציה של תלת-מימד: $1M = 100^3$ תאים.

מבחן 2021 - מועד ב'

שאלה 1

לצערינו, בכל העולם. נגיד ה"קורונה" התפשט מאוד בקרב האוכלוסייה, נכון להיום הקורונה פוגעת בכולם ללא הבדל דת גזע או מין. בהתאם לזאת בוצעו המון בדיקות קורונה לאזרחי ישראל כדי לדעת איפה יש יותר חולים. את הנתונים אספו פעם אחת לפני שהגיעו החיסונים לארץ ופעם שניה אחרי הגעת החיסונים. נתוני התחלואה בארץ לפי תוצאות הבדיקות הן כדלקמן:

התפלגות החיוביים בבדיקה לפני שהגיעו החיסונים לארץ - ירושלים - 30%, אריאל - 20%, תל אביב - 20%, רמת גן - 10%, שומרון - 10%, בני ברק - 10%

לעומת זאת, לאחר שהגיעו החיסונים לארץ, התפלגות החיוביים בבדיקה נראית כך:

ירושלים 18%, בני ברק - 27%, תל אביב - 10%, רמת גן - 20%, חיפה - 9%, אריאל - 16%

שני חברים לקורס "אלגוריתמי ניווט" באו לאוניברסיטה להיבחן, אחד מרמת גן והשני מאריאל. אחד עשה בדיקה לפני שהגיע החיסון והשני עשה בדיקה אחרי שהגיע החיסון (שניהם יצאו חיוביים). בכניסה לכיתה שני החברים הסכימו ביניהם שהם אינם מספרים מי עשה בדיקה לפני ומי אחרי החיסון. מה הסיכוי שהסטודנט מאריאל עשה בדיקה לפני שהגיעו החיסונים לארץ?

פתרון:

נגדיר מאורע E - "בהינתן שאחד עשה בדיקה לפני שהגיעו החיסונים והשני אחרי שהגיעו החיסונים".

נגדיר מאורע H - "הסטודנט מאריאל עשה בדיקה לפני שהגיעו החיסונים".

נגדיר בצורה הבאה (*before*, *after*) כלומר $E = (ariel, ramat gan) \cup (ramat gan, ariel)$

נשתמש בהסתברות המותנית:

$$\Pr(H|E) = \frac{\Pr(H \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{(ariel, ramat gan)}{(ariel, ramat gan) + (ramat gan, ariel)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.16} = \frac{0.04}{0.056} = \frac{5}{7}$$

שאלה 2

נניח שיש לנו את העולם הבא:

כחול	ירוק	אדום
ירוק	ירוק	אדום
אדום	אדום	ירוק
ירוק	כחול	מחסום###

אנחנו מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט (התפלגות אחידה). לרובוט יש חיישן המזהה צבעים. החיישן מזהה את הצבעים לפי הפרמטרים הבאים:

במידה והרובוט נמצא על משבצת אדומה: החיישן ידווח אדום בהסתברות של 80%. ירוק – 10%, כחול – 10%

במידה והרובוט נמצא על משבצת ירוקה: החיישן ידווח ירוק בהסתברות 70% ואדום – 10%, כחול – 20%
במידה והחיישן נמצא על משבצת כחולה: החיישן ידווח כחול בהסתברות של 50% ו ירוק ב-50%.

העולם אינו ציקלי בכל הכיוונים. רובוט שמגיע לקיר, נשאר שם. שימו לב שהרובוט **לא יכול להגיע ולא יכול להתחיל במשבצת עם המחסום** בשום אופן.

בדוגמה שלנו, **החיישן הרגיש "כחול" ואז הרובוט זז שמאלה. ולאחר מכן זז למטה. התזוזה הינה מדויקת.**

א. מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "אדום"?

ב. פתור את השאלה שוב בהינתן הפרמטרים הבאים: המחסום הינו מחסום קסם וכאשר מגיעים אליו משוגרים לאחת מהמשבצות הכחולות לפי ההסתברות הבאה: 80% משתגרים למשבצת הכחולה בפינה הימנית העליונה ו-20% למשבצת הכחולה בעמודה האמצעית התחתונה.

פתרון:

מתחילים עם חוסר וודאות מוחלט ולכן המרחב אחיד:

$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
מחסום	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

החיישן הרגיש כחול, לכן:

• אם הוא במשבצת אדומה אז: $\frac{1}{11} \cdot 0.1 = \frac{1}{110}$

• אם הוא במשבצת ירוקה אז: $\frac{1}{11} \cdot 0.2 = \frac{1}{55}$

• אם הוא במשבצת כחולה אז: $\frac{1}{11} \cdot 0.5 = \frac{1}{22}$

ננרמל:

$$\Sigma = 4 \cdot \frac{1}{110} + 5 \cdot \frac{1}{55} + 2 \cdot \frac{1}{22} = \frac{12}{55}$$

לאחר נרמול:

- אם הוא במשבצת אדומה אז: $\frac{1}{110} \cdot \frac{55}{12} = \frac{1}{24}$
- אם הוא במשבצת ירוקה אז: $\frac{1}{55} \cdot \frac{55}{12} = \frac{2}{24}$
- אם הוא במשבצת כחולה אז: $\frac{1}{22} \cdot \frac{55}{12} = \frac{5}{24}$

$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{5}{24}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$
$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
מחסום	$\frac{5}{24}$	$\frac{2}{24}$

נתון כי הרובוט זז שמאלה ואז למטה, התנועה מדויקת והעולם לא ציקלי לכל הכיוונים.

הרובוט זז שמאלה:

$\frac{1+2}{24} = \frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	0
$\frac{1+2}{24} = \frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
$\frac{2+1}{24} = \frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
מחסום	$\frac{5+2}{24} = \frac{7}{24}$	0

הרובוט זז למטה:

0	0	0
$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	0
$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
מחסום	$\frac{8}{24}$	0

נשאל מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "אדום"?

לכן נחשב:

$$\left(\frac{3+2}{24}\right) \cdot (0.8) + \left(\frac{5+6}{24}\right) \cdot (0.1) + \left(\frac{8}{24}\right) \cdot (0) = \frac{5}{24} \cdot 0.8 + \frac{11}{24} \cdot 0.1 = \frac{17}{80}$$

פתרון ב':

נחזור לשלב אחרי הנרמול (לפני שלב התנועה) מסעיף א':

$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{5}{24}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$
$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
מחסום	$\frac{5}{24}$	$\frac{2}{24}$

נתון כי הרובוט זז שמאלה ואז למטה, יש לנו מחסום קסם - אם מגיעים אליו אז 80% לכחול הימני ו-20% לכחול האמצעי. תחילה נזוז שמאלה:

$\frac{1+2}{24} = \frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$0.8 \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{6}$
$\frac{1+2}{24} = \frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
$\frac{2+1}{24} = \frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
מחסום	$\frac{2}{24} + 0.2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{8}$	0

נזוז למטה:

0	0	$0.8 \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{10}$
$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	0
מחסום	$\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + 0.2 \cdot \frac{3}{24} = \frac{23}{120}$	0

נשאל מה ההסתברות שהחיישן ירגיש בפעם השנייה "אדום"?

לכן נחשב:

$$\left(\frac{3+2}{24}\right) \cdot (0.8) + \left(\frac{5+3}{24} + \frac{1}{6}\right) \cdot (0.1) + \left(\frac{23}{120} + \frac{1}{10}\right) \cdot (0) = \frac{5}{24} \cdot 0.8 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = \frac{13}{60}$$

שאלה 3

יש לבנות מסנן קלמן למעקב של רובוט במשקל של במימד **אחד** (מיקום ומהירות). וקטור המצב מוגדר כמיקום ומהירות בחד מימד $(Px \ Vx)$.

בנקודה מסוימת וקטור המצב הינו נראה כך: $(300m \ 12.5m/s)$. המודל הדינמי של המערכת הינו מהירות קבועה. בנוסף, קיים כוח חיצוני על הרובוט שמייצר תאוצה של $5m/s^2$ – **(מינוס)** חמש מטר חלקי שנייה (בריבוע). קבוע הזמן של המערכת הינו $2 \ sec$. חוסר הוודאות הראשוני במיקום הינו 5 מטרים וחוסר הוודאות במהירות הינו 1.2 מטר לשניה. בנוסף, נתונה מטריצת Q הבאה: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

א. חשבו את מטריצת F ואת וקטור המצב החדש ומטריצת P החדשה ב $t = 2 \ sec$. (X, P, F) .

ב. למערכת יש חיישן המודד את המיקום ביחידות של קילומטר ואת המהירות ביחידות של מטר לשנייה. חוסר הדיוק של החיישן הינו 0.01 ק"מ למיקום ו-3 מטר לשנייה עבור המהירות.

הערכים הנמדדו מהחיישן ב $t = 2$ הינם 0.321 ק"מ ו 2 מטר לשנייה (עבור המהירות)

חשבו את מטריצה H , וקטור המצב X , הגבר קלמן K ומטריצת P לאחר שלב העדכון. (X, P, K, H) .

ג. הסבירו מתי נכון להשתמש במסנן קלמן **מורחב** ובאילו תרחישים יהיה לא נכון/לא יעיל להשתמש בו.

פתרון תקין, נבדק בפייתון.**פתרון א':**

נתון לנו:

$$X_{k-1} = \begin{pmatrix} 300 \\ 12.5m \end{pmatrix}, \quad u_k = -5, \quad \Delta t = 2, \quad P_{k-1} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 1.2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1.44 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בסעיף זה בעצם מבקשים ממנו לחשב את המשוואות הבאות:

$$X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot \vec{u}$$

$$P_k = F_k \cdot P_{k-1} \cdot F_k^T + Q$$

מטריצה F היא עובדת עם מודל תנועה לינארי ומעבירה את וקטור המצב מ- k למצב $k + 1$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה P היא מטריצת חוסר הוודאות החדשה.

בשביל לחשב את P_k צריך תחילה לחשב את P_{k-1} (נתון לנו), אותו נציב לפי חוסר הוודאות הראשוני של הפיצ'רים של החיישן (מיקום ומהירות).

כעת נחשב את P_k לפי הנוסחה: $P_k = F_k \cdot P_{k-1} \cdot F_k^T + Q$

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1.44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix}$$

כעת נחשב את וקטור המצב החדש X_k לפי הנוסחה הבאה: $X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot \vec{u}$
מאחר ונתון לנו שהתאוצה קבועה אז נחשב את מטריצת הבקרה B בצורה הבאה:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2^2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

עבור וקטור הבקרה נתון לנו $u_k = -5$

לכן נקבל:

$$X_k = F \cdot X_{k-1} + B \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 300 \\ 12.5m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-5) = \begin{pmatrix} 315 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

לסיכום: $X_k = \begin{pmatrix} 315 \\ 2.5 \end{pmatrix}$, $P_k = \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix}$

פתרון ב':

בסעיף זה מבקשים ממנו לחשב את המשוואות הבאות:

- חישוב הגבר קלמן:
- עדכון השערוך עם המדידה z_k : $X_k = X_k + K_k(z_k - HX_k)$
- עדכון מטריצת השגיאה (חוסר הוודאות): $P_k = (I - K_k H)P_k$

לפי הנתון:

למערכת יש חיישן המודד את המיקום ביחידות של קילומטר ואת המהירות ביחידות של מטר לשנייה.

במטריצת H נבצע המרה ממטר לק"מ ולגבי המהירות במטר אין צורך להמיר: $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

חוסר הדיוק של החיישן הינו 0.01 ק"מ למיקום ו-3 מטר לשנייה עבור המהירות.

לכן, מטריצת הרעש במדידה תהיה $R = \begin{pmatrix} 0.01^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

הערכים הנמדדו מהחיישן ב $t = 2$ הינם 0.321 ק"מ ו-2 מטר לשנייה, כלומר $Y_k = z_k = \begin{pmatrix} 0.321 \\ 2 \end{pmatrix}$

נחשב את הגבר קלמן:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 242.624861 & 0.1906678672 \\ 17.16010805 & 0.2089666861 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נעדכן את וקטור המצב:

$$\begin{aligned} X_k &= X_k + K_k (z_k - H X_k) = \\ &= \begin{pmatrix} 315 \\ 2.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 242.624861 & 0.1906678672 \\ 17.16010805 & 0.2089666861 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0.321 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 315 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 316.3604152 \\ 2.498477305 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נעדכן את אי הוודאות החדשה אחרי העדכון:

$$\begin{aligned} P_k &= (I - K_k H) P_k = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 242.624861 & 0.1906678672 \\ 17.16010805 & 0.2089666861 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32.76 & 2.88 \\ 2.88 & 2.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.2624861 & 1.716010804 \\ 1.716010804 & 1.880700175 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X_k = \begin{pmatrix} 316.3604152 \\ 2.498477305 \end{pmatrix}, \quad P_k = \begin{pmatrix} 24.2624861 & 1.716010804 \\ 1.716010804 & 1.880700175 \end{pmatrix}$$

לסיכום קיבלנו:

פתרון ג': (מהפתרון בדרייב).

יסודות מסנן קלמן מורחב:

4. רעש ממוצע סביב 0.

5. טרנספורמציה לינארית משלב לשלב.

6. בחירה יחידה Unimodal לפי התפלגות גאוס.

פחות יעיל להשתמש כאשר הפונקציה אינה לינארית וצריך להשתמש ביעקוביאן. כאשר סט המשוואות אינו לינארי משתמשים במטריצת יעקוביאן על מנת לעבור למימד החישי. בעזרת יעקוביאן נותנים קירוב או ביטוי לינארי לסט של משוואות לא לינאריות. זה מבוסס על רעיון טור טיילור שמפתח סביב נקודה מסוימת. ככל שיהיו יותר מקטעים לינאריים ככה הפיתוח יהיה לתחום גדול יותר. ככל שהמשוואה לא לינארית, אז מסנן קלמן יתקשה להשתמש בפונקציה. יוצא מכך שמטריצת יעקוביאן נקבל רק קירוב לפונקציה בדיוק נמוך יותר ממה שהיינו מקבלים אם הפונקציה הייתה לינארית. ולא נכון להשתמש כאשר יש בחירה מרובה או שהרעש לא ממוצע סביב ה-0.

נכון להשתמש בקלמן כשצריך בחירה יחידה, שצריך לבצע כפל גאוסיאני, שהרעש ממוצע סביב 0 ושהמעברים לינאריים משלב לשלב. במדידות קלמן אנו גם מתחשבים בתאוצה, תאוצה ועוד חוסר וודאות מהסביבה. כאשר $KG \rightarrow 0$ אז נאמין בשערוך שלנו. כאשר $KG \rightarrow 1$ אז יש הרבה חוסר וודאות וניקח את המדידה מהחיישן. עם הזמן נרצה שה- $KG \rightarrow 0$ וכך תהיה לנו פחות חוסר וודאות על ידי כך שנבדוק את דיוק השיערוך מול דיוק מדידת החיישן נצליח להגיע לבסוף למיקום המדויק של הרובוט שלנו.

חלאס.