חשבון אינפיניטסימלי 2

מתוך הרצאות של מרצה ד"ר שלמה ינץ

מורכב ממתכונת שונה השמה דגש יותר על פרקטיקה מתאוריה

חשבון אינפיניטסימלי 2 - מחברת הרצאות (פרקטי)

נערך ונכתב על-ידי דור עזריה

2021

ספר זה לא נבדק על ידי מרצה, יתכן שימצאו טעויות.

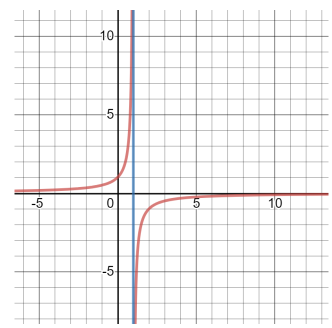
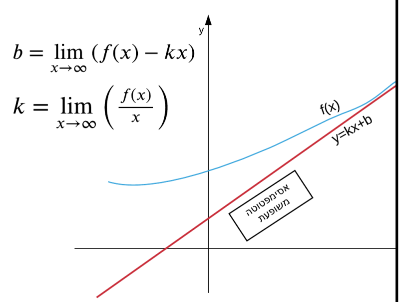
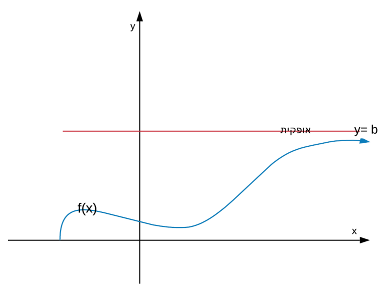
לסיכומים נוספים שלי במדעי המחשב ומתמטיקה:
https://dorazaria.github.io/

מוזמנים לעקוב אחרי 😊:
LinkedIn: https://www.linkedin.com/in/dor-azaria/
GitHub: https://github.com/DorAzaria

תוכן עניינים

מקלורן
סכומים
דרבון
רימן
מבחני התכנסות
הוכחות
טריגונומטריה
טורים
קושי

חזרה פרקטית על אינפי 1

אסימפטוטה		
אסימפטוטה אנכית	**אסימפטוטה משופעת/ אלכסונית**	**אסימפטוטה אופקית**
אסימפטוטה אנכית נוצרת בדר"כ איפה הפונקציה לא מוגדרת. למשל $x = 1$ (בכחול) ו- $y = \frac{1}{1-x}$ (באדום). 	צריך למצוא את k,b לפי הגבולות שבתמונה בשביל הנוסחת קו ישר. 	$y = kx + b$ אם באסימפטוטה משופעת אם k=0 אז נקבל ש- y=b ואז נולד לנו אסימפטוטה אופקית. 

חקירת פונקציות

1. מציאת תחום הגדרה של פונקציה
2. מציאת נקודות קיצון
3. מציאת min-max
4. מציאת תחומי עליה וירידה + קמירות ∩ וקעירות∪
5. מציאת אסימפטוטות
6. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים
7. סקיצה (שרטוט) של הפונקציה על גרף

שאלת חקירת פונקציה: $y = f(x) = -\frac{x^2}{x+2}$

1. <u>מציאת תחום הגדרה:</u> $D_x = \{x \mid (-\infty < x < +\infty) \wedge (x \neq -2)\}$

מכאן נובע ש-$x = -2$ היא **אסימפטוטה אנכית**.

2. <u>מציאת נקודת קיצון:</u>

$f'(x) = 0 \Leftarrow x_0$ היא נקודת קיצון.

$$y(x) = -\frac{x^2}{x+2}$$

$$y'(x) = -\frac{-2x(x+2)-1(-x^2)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x}{(x+2)^2}$$

נמצא את ערכי ה-x כאשר הנגזרת שווה ל-0:

$$y'(x) = \frac{-x^2-4x}{(x+2)^2} = 0 \backslash \cdot (x+2)^2 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(-x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$$

לכן נקודות הקיצון שלנו הם: $x_1 = 0,\ x_2 = -4$

3. <u>מציאת min-max:</u>

למצוא $f''(x)$, אם $f''(x) > 0$ אז הוא min ואם $f''(x) < 0$ אז הוא max.

אם המכנה גדול מ-0 אז נגזור רק את המונה (זה מקצר זמן עבודה), למה לא צריך לגזור את המכנה? בגלל שהוא גם ככה לא ישפיע על המקסימום והמינימום שלנו מאחר והמכנה חיובי תמיד אז אין צורך לבדוק אותו. במקרה של הפונקציה הגזורה שלנו יש לנו מעלה חיובית (2) ולכן היא תמיד חיובית ובא להקל עלינו.

$$y''(x) = \frac{-2x-4}{(irrelevant)}$$

כעת נציב את נקודות הקיצון שמצאנו בסעיף 2 בתוך הנגזרת הכפולה ונקבל:

$y''(x_1) = y''(0) = \frac{-2\cdot(0)-4}{(irrelevant)} = -4 < 0$ ולכן זה נקודת max.

$y''(x_2) = y''(-4) = \frac{-2\cdot(-4)-4}{(irrelevant)} = 4 > 0$ ולכן זה נקודת min.

כעת נמצא ערך min-max:

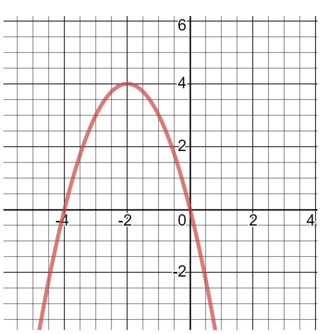
נציב את נקודות הקיצון שלנו בפונקציה המקורית:

$y_{max}(0) = max(x_1, y_1) = max(0, 0)$

$y_{min}(-4) = min(x_2, y_2) = min(-4, 8)$.

4. <u>מציאת תחומי עליה וירידה + קמירות ∩ וקעירות</u>∪:

א. עליה אם $y'(x) > 0$:



$$y'(x) = \frac{-x^2-4x}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow -x^2 - 4x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-x-4) > 0 \Rightarrow -4 < x < 0 \Rightarrow$$

מאחר שציינו בתחום ההגדרה ש-$x \neq -2$ ו-x הוא שייך לתחום בגרף אזי חשוב מאוד לציין בנוסף לתחום ש- $-4 < x < 0$
אבל $x \neq -2$ אלא שייך אליו.

ב. עליה אם $y'(x) < 0$:

$$y'(x) = \frac{-x^2-4x}{(x+2)^2} < 0 \backslash \cdot ((x+2)^2) \Rightarrow -x^2 - 4x < 0 \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x > 0 \Rightarrow$$

תחום הירידה הוא כאשר $x > 0 \ \wedge \ x < -4$.

5. <u>מציאת אסימפטוטות:</u>

א. $x = -2$ אז מדובר באסימפטוטה אנכית.

ב. מציאת אסימפטוטה משופעת לפי הנוסחה $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-x^2}{(x+2)}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{x^2(1+\frac{2}{x})} = -1 = k$$

$$) - k(x)] = \lim_{x \to \infty} [\frac{-x^2}{x+2} - x] = \lim_{x \to \infty} [\frac{-x^2+x^2+2x}{x+2}] = \lim_{x \to \infty} [\frac{2x}{x+2}] = \lim_{x \to \infty} [\frac{2x}{x(1+\frac{2}{x})}] = 2 = b$$

נציב את ה-k,b שמצאנו ונקבל: $y = kx + b = -x + 2$,

ג. מציאת אסימפטוטה אופקית - מאחר ו-$k \neq 0$ אז אין לנו אסימפטוטה אופקית.

6. <u>נקודת חיתוך עם הצירים:</u>

אם x=0 נציב בפונקציה ונקבל ש- y=0.

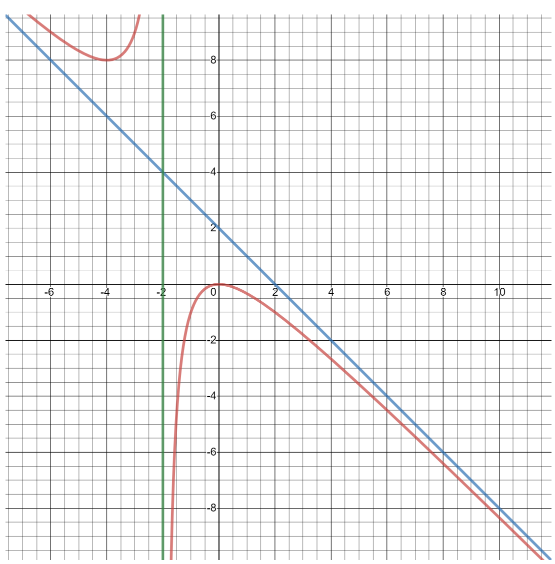
אם y=0 נציב בפונקציה ונקבל ש-x=0.

קיבלנו נקודת חיתוך עם הצירים במיקום (0,0).

הצבנו 0 מפני שהם הנקודות חיתוך שלנו מן הסתם.

7. <u>שרטוט הפונקציה:</u>

נשרטט קודם כל את האסימפטוטות כי הוא מחלק את המישור לחלקים.



גבולות ב-x=0			
1	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$	7	$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$
2	$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$	8	$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x}=1$
3	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	9	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$
4	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$	10	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
5	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$	11	$\lim_{x\to 0}x^\alpha\ln(x)=0\,;\ \forall\alpha>0$
6	$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=1$		
גבולות באינסוף			
1	$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty\,;\ \forall n>0$	2	$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0\,;\ \forall\alpha>0$

חוקי האינסוף		
פעולות אינסופיות		
$\infty^\infty=\infty$	$\sqrt{\infty}=\infty$	$\infty\cdot(-\infty)=-\infty$
	$\infty+\infty=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$
מצבים שאינם אי וודאות (עבור a סופי [שלילי, חיובי או אפס])		
$\frac{a}{\infty}=0$	$\frac{a}{-\infty}=0$	$\frac{a}{0}=\infty$

מצבי אי וודאות		
$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	$\frac{0}{0}$
0^0	0^∞	1^∞
	$0 \cdot \infty$	∞^0

חוק לופיטל

במצבי אי וודאות, בעזרת שיטת לופיטל נוכל לפתוח את כל מקרי האי-ודאות.

<u>ניסוח חוק לופיטל:</u> אם ניתנה 2 פונקציות $g(x)$, $f(x)$ הן גזירות בסביבה ומתקיים:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ אז נבצע:

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

שאלות

מצאו את הגבול $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+ln(x)}{e^x-e}$.

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+ln(x)}{e^x-e} \to \frac{0}{0} =?$ ⇐ הגענו למצב של אי ודאות ולכן נגזור את המונה ואת המכנה

בנפרד:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+ln(x)}{e^x-e} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

מצאו את הגבול $\lim_{x\to 0} \frac{x-sin(x)}{x^3}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{x-sin(x)}{x^3} \to \frac{0}{0} =?$ ⇐הגענו למצב של אי ודאות ולכן נגזור את המונה ואת המכנה

בנפרד:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{6} = \frac{1}{6}$$

מצאו את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} = ?$ ⇐הגענו למצב של אי ודאות ולכן נגזור את המונה ואת המכנה בנפרד:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}{e^x} = \ldots\ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}$$

מצאו את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot x}{x+e^x}$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot x}{x+e^x} \to \frac{\infty}{\infty} = ?$ ⇐הגענו למצב של אי ודאות ולכן נגזור את המונה ואת המכנה

בנפרד:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot x}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot(1+\frac{x}{2})}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{x}{4})}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+\frac{x}{4})}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

יש מקרים בהם צריך לעשות פעולות אלגבריות כדי להגיע למצב של משפט לופיטל, למשל:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) \to (\infty - \infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) \to \frac{0}{0} \Rightarrow ☑.$$

כעת נמצא גבול זה בעזרת לופיטל כמו שפתרנו בתרגילים הקודמים:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{e^x+e^x+x\cdot e^x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{e^x(2+x)}\right) = \lim_{x\to 0} ($$

תרגיל נוסף, תזכורת $\ln(0) = -\infty$, $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2$:

מצאו את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0} (x^2 \cdot \ln(x)) \to 0 \cdot \infty = ?$

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot ln(x)) = \lim_{x\to 0}(\frac{ln(x)}{\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to 0}(\frac{ln(x)}{x^{-2}}) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot x^{-3}} =$$

לוגריתמיזציה

כאשר נתקל במצב כזה למשל: $y = x^x \to y' = ?$

אזי נבצע לוגריתמוס ונקבל: $ln(y) = ln(x^x) = x\cdot ln(x)$.

כעת אנו נגזור משמאל לימין: $\frac{1}{y}\cdot y' = ln(x) + 1$ נכפול ב-y כדי לבודד את y' ונקבל:

$y' = y(ln(x) + 1)$ כבר ידוע לנו לפי הנתון ש- $y = x^x$ אזי התשובה היא: $y' = x^x(ln(x) + 1)$.

חשבון את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0}(sin(x))^x$, $\lim_{x\to 0}(sin(x))^x \to 0^0 = ?$

נעשה פעולה אלגברית, נסמן $y = (sin(x))^x$ וכעת נבצע לוגריתמוס ונקבל:

$$ln(y) = ln((sin(x))^x) = x\cdot ln(sin(x)) = \frac{ln(sin(x))}{\frac{1}{x}} \to \frac{-\infty}{\infty}$$

הגענו למצב של $\frac{\infty}{\infty} = 0^0$ וכעת נבצע לופיטל, תזכורת $1 = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}(ln(y)) = \lim_{x\to 0}\frac{ln(sin(x))}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{-\frac{1}{x^2}} =- \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot cos(x)}{sin(x)} =- \lim_{x\to 0}[x\cdot cos(x)\cdot(\frac{x}{sin(}$$

$$\lim_{x\to 0} y = 0 \to y = e^0 = 1$$

חשבון את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{ln(x)}$, $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{ln(x)} \to 1^{-\infty} = 1^{\infty} = ?$

נעשה פעולה אלגברית, נסמן $y = (1 + x)^{ln(x)}$ ונבצע לוגריתמוס ונקבל:

$$ln(y) = ln((1 + x)^{ln(x)}) = ln(x)\cdot ln(1 + x)$$

$$\lim_{x\to 0} ln(y) = \lim_{x\to 0}[ln(x)\cdot ln(1 + x)] = \lim_{x\to 0}[\frac{ln(1+x)}{\frac{1}{ln(x)}}] \to \frac{0}{0}$$

כעת נעשה משפט לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}[\frac{ln(1+x)}{\frac{1}{ln(x)}}] = \lim_{x\to 0}[\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{xln^2(x)}}] =- \lim_{x\to 0}[\frac{-\frac{x}{(1+x)^2}}{-\frac{ln(x)+2}{x^2ln^3(x)}}] =.... = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} ln(y) = 0 \to y = e^0 = 1$$

דיפרנציאל

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},\ f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

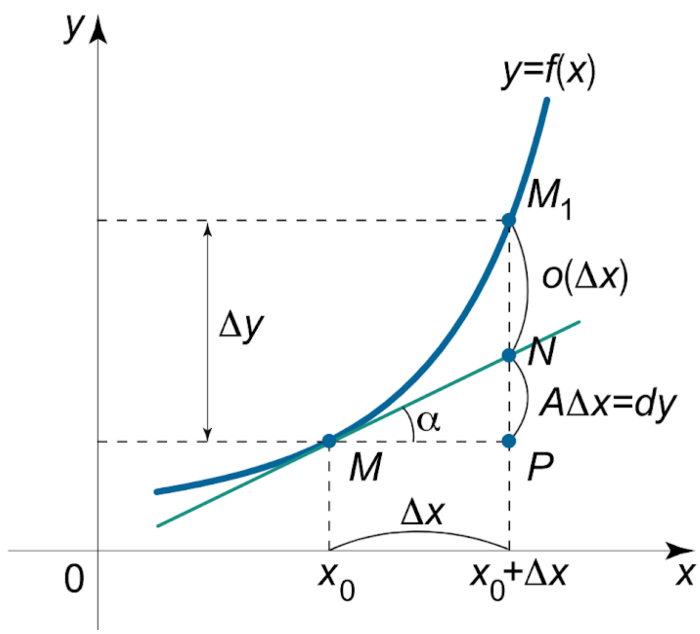
בהערכה גסה, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ נכפול בΔx ונקבל $\Delta y \approx f'(x)\cdot\Delta x + \varepsilon\cdot\Delta x$

הצורה הפורמאלית של הדיפרנציאל הוא: $dy = y'dx$

דיפרנציאל של פונקציה = לנגזרת של פונקציה כפול dx.

$y' = \frac{dy}{dx}$.

הדיפרנציאל של $y = sin(x)$ והוא $dy = (cos(x))\cdot dx$ בצורה פורמלית.



טורים

טורי מספרים

נתונה סדרה של מספרים ממשיים (יכול להיות מרוכבים)

①: $u_1, u_2, ..., u_{n,...}$ (מספרים ∞).

מ-① נרכיב סכום ②: $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$.

לפעמים כותבים את ② כך: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ או פשוט: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ כך שזהו סכום אינסופי.

ל-u_1 קוראים האיבר הראשי ול-u_n קוראים האיבר הכללי.

סכומים חלקיים

סכום של n איברים ראשונים נקראים **סכומים חלקיים.**

זאת אומרת: $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \dots\dots,\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,\ \dots$

קיבלנו בצד שמאל סדרה אינסופית של $\{S_n\}_1^\infty$ אבל בצד ימין קיבלנו סדרה של סכומים סופיים.

הגדרה- לטור ② קוראים **טור מתכנס**,

אם קיים גבול של סדרה של סכומים חלקיים $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$.

זאת אומרת,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

התכנסות של טור ② תלויה אם קיים גבול של סכומים חלקיים ול-S קוראים **סכום הטור.**

כדי למצוא את סכום הטור חייבים להרכיב סכומים חלקיים $\{S_n\}_1^\infty$ ולמצוא את הגבול.

דוגמה- נתון הטור הבא: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

ניתן לכתוב טור זה בצורה אחרת: $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}) + \dots$

$S_1 = \frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2})$

$S_2 = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

$\dots\dots\dots$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

והגבול הוא: $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1$

זאת אומרת שהטור מתכנס והסכום הוא 1.

דוגמה- מצאו את סכום הטור: $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

האיבר הכללי של הטור הוא: $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

נפרק איבר כללי לפי שברים חלקיים:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{(2n-1)} + \frac{B}{(2n+1)} \backslash \cdot (2n - 1)(2n + 1)$$

$$1 = A(2n + 1) + B(2n - 1)$$

נבחר גורם מאפס עבור 2 ה-"סוגריים",

נבחר $n = \frac{1}{2}$ ונקבל:

$$1 = A \cdot 2 + B \cdot 0 \Rightarrow 1 = 2 \cdot A \backslash : 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = A$$

נבחר $n = -\frac{1}{2}$ ונקבל:

$$1 = A \cdot 0 + B \cdot (-2) \Rightarrow 1 = -2 \cdot B \backslash : (-2) \Rightarrow -\frac{1}{2} = B$$

נציב את A,B שמצאנו ונקבל:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{(2n-1)} + \frac{B}{(2n+1)} = (\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{(2n-1)} + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{(2n+1)} = (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

כלומר קיבלנו ש: $u_n = (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ ולכן,

$$u_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3})$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$$

$\ldots\ldots\ldots$

כדי למצוא את סכום הטור חייבים להרכיב סכומים חלקיים $\{S_n\}_1^\infty$ ולמצוא את הגבול:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$S_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

אם נפתח סוגריים לכל הביטוי אז הכל מצטמצם לנו מלבד האיבר הראשון והאיבר האחרון:

$$S_n = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2n+1})$$

ולכן,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$$

זאת אומרת, סכום הטור הוא $\frac{1}{2}$.

שאלת בית- הוכיחו שסכום הטור הוא $\frac{1}{4}$.

נציג הסכום הבא: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+....+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+....$

האיבר הכללי של הטור הוא: $u_n=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$,

נפרק את האיבר הכללי לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{A}{(4n-3)}+\frac{B}{(4n+1)}\backslash\cdot(4n-3)(4n+1)$$

$$1=A(4n+1)+B(4n-3)$$

נבחר גורם מאפס עבור 2 ה-"סוגריים",

נבחר $n=\frac{3}{4}$ ונקבל:

$$1=A(4\cdot\frac{3}{4}+1)+B\cdot0\Rightarrow1=A\cdot4\backslash:4\Rightarrow\frac{1}{4}=A$$

נבחר $n=-\frac{1}{4}$ ונקבל:

$$1=A\cdot0+B(4\cdot(-\frac{1}{4})-3)\Rightarrow1=B\cdot(-4)\backslash:(-4)\Rightarrow-\frac{1}{4}=B$$

נציב את ה-A,B שמצאנו:

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=(\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{(4n-3)}+(-\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{(4n+1)}=(\frac{1}{4})\cdot(\frac{1}{(4n-3)}-\frac{1}{(4n+1)})$$

כלומר קיבלנו ש- $u_n=(\frac{1}{4})\cdot(\frac{1}{(4n-3)}-\frac{1}{(4n+1)})$ ולכן,

$$u_1=\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{1}-\frac{1}{5})$$

$$u_2=\frac{1}{45}=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})$$

$$\cdots$$

כדי למצוא את סכום הטור חייבים להרכיב סכומים חלקיים $\{S_n\}_1^\infty$ ולמצוא את הגבול:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n$$

$$S_n=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{1}-\frac{1}{5})+\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+.....+(\frac{1}{4})\cdot(\frac{1}{(4n-3)}-\frac{1}{(4n+1)})$$

כעת אם נפתח כל הסוגריים הכל מצטמצם מלבד האיבר הראשון והאחרון כלומר:

$$S_n=\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{4n+1}=\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{4n+1})$$

ולכן,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{4n+1})=\frac{1}{4}$$

זאת אומרת, סכום הטור הוא $\frac{1}{4}$.

שארית של טורים

נתון הטור ① : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ...$

לטור .... $u_{n+1} + u_{n+2} +$ קוראים שארית **n** של טור ① או **הזנב**.

אפשר לכתוב גם כך : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m} + ...$

מכאן, $S_{n+m} = S_n + (S_{n+m} - S_n)$.

אפשר למצוא גבול לפי m כאשר $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S_n + \lim_{m\to\infty} (S_{n+m} - S_n)$$

$$S = S_n + R_n$$

$$S = \lim_{n\to\infty} (S_n + R_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n = S + \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = S - S = 0$$

ומכאן קיבלנו משפט **חשוב**,

<u>**משפט**</u>- אם טור ② (הנתון) מתכנס אזי שארית n-ית R_nשואפת ל-0.

זאת אומרת אם טור מתכנס אז השארית שואפת ל-0.

טור גיאומטרי או הנדסי

נתבונן בטור: $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$

כאן מנה q של סדרה מרכיבה סכומים חלקיים,

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$$

סכום סופי של סדרה הוא טור הנדסי.

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad \text{או} \quad S_n = \frac{a-aq^n}{q-1}$$

אפשר לכתוב סכום גם בצורה אחרת,

$$S_n = \frac{a_1q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - a_1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} =$$

$$= \frac{a_1}{1-q} - 0 = \frac{a_1}{1-q}, \ |q| < 1, \ q \neq 1$$

קיים גבול $\frac{a_1}{1-q}$ זאת אומרת סכום טור הנדסי $S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

- אם $|q| \geq 1$ הטור מתבדר.

<u>לסיכום:</u>

טור הנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ מתכנס $0 < a < 1$.

$\lim_{n\to\infty} q^n$ אם $q > 1 \to \infty$ ואם $0 < q < 1 \to 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ אם $q > 1$ אז הוא מתבדר ואם $0 < q < 1$ אז הוא מתכנס.

טורים חיוביים ומבחני התכנסות

משפט- נתון טור: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + .. $.

אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס אזי האיבר הכללי שואף ל-0.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

הוכחה- נניח שטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס $\Leftarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$ כאשר:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

אם הטור מתכנס, זאת אומרת: $S_n \to S,\ S_{n-1} \to S, \forall n:\ n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + u_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

∎

- מסקנה: אם האיבר הכללי שואף לאפס זה לווא דווקא אומר שהטור מתכנס.
- אם האיבר הכללי $\leftarrow a \neq 0 \Leftarrow$ אז הטור מתבדר $(u_n \to a \neq 0) \Rightarrow$

1. מבחן ההשוואה

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס, אם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר.

2. מבחן ההשוואה הגבולי

אם קיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \ne 0$ (מבחן ההשוואה הגבולי) אז $\sum b_n \sim \sum a_n$ שקולים

ושני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

- ההשוואה צריכה להיות עם טור מוכר וחייבים להכיר את התנהגות הטור.

שאלה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-\frac{\sqrt{n}}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$$

$$a_n = \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}, b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{טור הרמוני מתבדר}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{1}{\sqrt{n}})n^2}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})n} = 1 \ne 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{ולכן הטור הנתון מתבדר}$$

שאלה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n}+3^{4n}+2^n}{5^{2n}+6^{3n}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n}+3^{4n}+2^n}{5^{2n}+6^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64^n+81^n+2^n}{25^n+216^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{81^n((\frac{64}{81})^n+1+(\frac{2}{81})^n)}{216^n((\frac{25}{216})^n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{81}{216})^n \cdot \frac{(\frac{64}{81})^n+1+(\frac{2}{81})^n}{(\frac{25}{216})^n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{64}{81})^n+1+(\frac{2}{81})^n}{(\frac{25}{216})^n+1} = 1 \neq 0$$

3. מבחן דלמבר/מבחן המנה

אם קיים גבול לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ אז:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \Rightarrow \begin{cases} D<1 & \text{מתכנס} \\ D=1=? \\ D>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

שאלה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$:

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(4(n+1)-1)} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot1\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{(2n)!\cdot1\cdot\ldots\cdot(4n-1)(4n+1)(4n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{1}{n})}{16n^2(1+\frac{1}{4n})(1+\frac{3}{4n})} = \frac{1}{4}$$

ומכאן לפי מבחן המנה הטור הזה **מתכנס**.

4. מבחן קושי/מבחן השורש

נניח שקיים גבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$ אז:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C \Rightarrow \begin{cases} C<1 & \text{מתכנס} \\ C=1=? \\ C>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

5. מבחן אינטגרלי

אם $F(x)$ היא פונקציה מונוטונית, חיובית (יורדת) לכל $x \geq 1$

אז התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ תלוי באינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ (כאשר $u_n = f(n)$).

הטור ההרמוני

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +\ldots.+ \frac{1}{n} +\ldots$ הטור ההרמוני מתבדר.

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = lnx|_1^{\infty} = ln(\infty) - ln(1) = \infty$$

טור עם סימנים מתחלפים

מבחן לייבניץ

נתון הטור: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \quad , \quad (u_n > 0)$$

אם מתקיים שני תנאים:

1. האיברים של הטור הם בירידה כלומר: $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$
2. אם $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

אז מכאן נובע שהטור **מתכנס**.

דוגמה 1: $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \ldots$

<u>בדיקת תנאים ללייבניץ:</u>

1. בדיקת ירידה:

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{2}>\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{1}{3}>\frac{1}{3+\frac{1}{3}}$$

$$\frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{1}{4}>\frac{1}{4+\frac{1}{4}}$$

ומכאן: $\frac{1}{2}>\frac{1}{2+\frac{1}{2}}>\frac{1}{3+\frac{1}{3}}>\frac{1}{4+\frac{1}{4}}>\ldots$

2. בדיקת גבול:

$$\lim_{n\to}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$$

ולכן הטור **מתכנס.**

דוגמה 2: $1.1-1.01+1.001-1.0001+\ldots$

<u>בדיקת תנאים ללייבניץ:</u>

1. בדיקת ירידה: $1.1>1.01>1.001>\ldots$ אכן מתקיים בירידה.
2. בדיקת גבול: $u_n=1+\frac{1}{10^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$$

ולכן הטור **מתבדר**.

התכנסות בהחלט

(מתייחס לטורים מתחלפים):

נתון הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ נרכיב בערך מוחלט את טור זה ונקבל טור חדש: $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

הגדרה: אם טור $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ מתכנס אזי אומרים שטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **מתכנס בהחלט**.

לדוגמה: $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\ldots$

נחקור, נבחן את הטור בסימנים של ערך מוחלט כלומר: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$

לכן $q=\frac{1}{2}<1$ ולכן הוא מתכנס אז הטור המקורי הוא מתכנס **בהחלט**.

התכנסות על תנאי

(מתייחס לטורים מתחלפים):

לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ קוראים **מתכנס על תנאי** אם $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ מתבדר.

טורים חיוביים		
מבחן ההשוואה	**מבחן ההשוואה הגבולי**	**מבחן השורש / מבחן כושי**
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס, אם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר.	אם קיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ אז $\sum b_n \sim \sum a_n$ שקולים ושני הטורים **מתכנסים** ו**מתבדרים יחדיו**.	נניח שקיים גבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$ אז: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C \Rightarrow \begin{cases} C<1 & \text{מתכנס} \\ C=1=? & \\ C>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$
מבחן דלמבר / מבחן המנה	**מבחן אינטגרלי**	**טור הנדסי / גיאומטרי**

אם קיים גבול לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ אז: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \Rightarrow \begin{cases} D<1 & \text{מתכנס} \\ D=1=? & \\ D>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$	אם $F(x)$ היא פונקציה מונוטונית, חיובית (יורדת) לכל $x \geq 1$ אז התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ תלוי באינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ (כאשר $u_n = f(n)$).	טור הנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ מתכנס $0 < a < 1$. $\lim_{n\to\infty} q^n$ אם $q > 1 \to \infty$ ואם $0 < q < 1 \to 0$. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ אם $q > 1$ אז הוא **מתבדר** ואם $0 < q < 1$ אז הוא **מתכנס**.
טורים עם סימנים מתחלפים		
מבחן לייבניץ	**התכנסות בהחלט**	**התכנסות על תנאי**
אם מתקיים שני תנאים: 1. האיברים של הטור הם בירידה כלומר: $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ 2. אם $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ אז מכאן נובע שהטור **מתכנס**.	אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ **מתכנס** אזי אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **מתכנס בהחלט**.	לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ קוראים **מתכנס על תנאי** אם $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ **מתבדר**.

נקודות חשובות

1. אם $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ מתכנס אזי **שארית (הזנב)** ה-n-ית R_n שואפת ל-0. זאת אומרת אם טור מתכנס אז השארית שואפת ל-0.
2. סכום של n איברים ראשונים נקראים **סכומים חלקיים**.
3. אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **מתכנס** אזי האיבר הכללי שואף ל-0.
4. **הטור ההרמוני** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ **מתבדר**.
5. $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \approx 2.71828$ **(קבוע אוילר = e)**.
6. ניתן להשתמש ב-**כלל השורש**: $C = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, C מקיים אותם תנאים במבחן השורש.

משפטים בסיסיים להתכנסות טורים

משפט 1: אם מספר $c \neq 0$ קבוע,
אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו-$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot u_k$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

הוכחה: נסמן:

S_n - סכומים חלקיים של טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

S'_n- סכומים חלקיים של טור $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot u_k$.

ברור ש- $S'_n = S_n \cdot c$ בגלל ש-c קבוע יוצא לפני הסכום (לפי חוקי טורים).

לכן הסדרות $\{S_n\}_1^{\infty}$ ו-$\{S'_n\}_1^{\infty}$ מתכנסות או מתבדרות יחדיו.

∎

משפט 2: אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$,

A ו-B מתכנסים אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n]$ מתכנסים

ואפשר לכתוב: $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B$.

הוכחה: נסמן A_n ו-B_n סכומים חלקיים בהתאמה.

נחשב סכומים חלקיים של טור $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n]$.

לכן נקבל: $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A_n \pm B_n$.

לאחרון נעבור לגבול כאשר $n \to \infty$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [A_n \pm B_n] = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B$$

∎

משפט חשוב:

אם לכתוב (להכניס) איברים <u>מספר סופי</u> איברים לטור <u>מתכנס</u>

אזי טור הישאר <u>מתכנס</u> אם מראש מתכנס.

ומתבדר אם מראש מתבדר.

זאת אומרת, לא משפיע הורדת או הכנסת (הוספת) מספר איברים סופי בתוך הטור.

הוכחה:

נתון הטור: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ ①, קודם נכניס מספר אפסים בטור ① כלומר,

$u_1 + u_2 + \dots + u_n + 0 + 0 + 0 + \dots$.

פעולה זו לא משפיעה על התכנסות של טור ולא על הסכום של הטור.

נניח טור חדש ונסמן: $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ ②

ונניח טור חדש נוסף ונסמן: $w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$ ③

שאותו מקום עומד טור ② כולל ....,0,0,0

סכום של ③ נקבל לפי משפט סכום:

$(v_1 + w_1) + (w_2 + w_2) + \dots + (v_n + w_n) + \dots$

טור <u>מתכנס</u> עם הטור ② ו- ③.

❚

מסקנה: אם לטור המתכנס להוריד מספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הטור.

טענה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$ ומתבדר עבור $\alpha \leq 1$.

הוכחות של מבחני ההתכנסות

משפט 1 (מבחן ההשוואה I): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ טורים חיוביים ונניח ש-$u_n \le v_n$ לכל n אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס והם מקיימים את האי-שוויון $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$ מתבדר.

הוכחה:

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ב- (S_N).

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ב- (T_N).

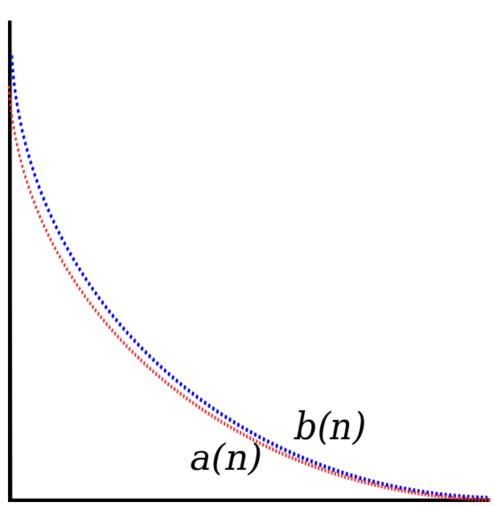
לפי ההנחה שלנו מתקיים $S_N \le T_N$.

1. אם (T_N) מתכנסת ל-T כלומר $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ אזי גם (S_N) מתכנסת ל-T
   כי הרי $S_N \le T_N \le T$ לכל N, מכאן נובע ש-(S_N) מתכנסת.
   לכן לפי משפט אם קיים גבול $\lim_{n\to\infty} u_n$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתבדר אזי $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ לא חסומה מלעיל ומכיוון ש-$S_N \le T_N$ לכל N,
   הרי שגם $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ לא חסומה מלעיל ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ הוא טור מתבדר.

∎

הערה למשפט 1: המשפט הוא בעל תוקף
גם אם לכל c קבוע $u_n \le v_n$.

- תזכורת סימון כללי:
  $(\infty >)=$ מתבדר , $(\infty <)=$ מתכנס.



משפט 2 (מבחן ההשוואה II (הגבולי)): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ טורים חיוביים.

א. אם קיים $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \neq 0$ וגם $0 < c < \infty$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ אז מהתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ נובעת התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$ אז מהתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ נובעת התכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

הוכחה:

א. מהגדרת הגבול L לכל $0 < \varepsilon$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $L - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < L + \varepsilon$.

נקבל כי $v_n(L - \varepsilon) < u_n < v_n(L + \varepsilon)$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס, אזי לפי מבחן ההשוואה (1): $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(L - \varepsilon)$ מתכנס אמ"ם $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנס.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתבדר, אזי לפי מבחן ההשוואה (1): $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(L + \varepsilon)$ מתבדר אמ"ם $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתבדר.

ב. מהגדרת הגבול קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{u_n}{v_n} = \left|\frac{u_n}{v_n} - 0\right|$ או $u_n < v_n$.

לכן לפי מבחן ההשוואה אם $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

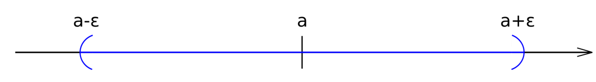
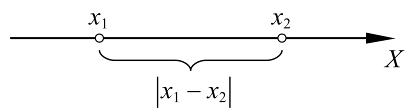
ג. מהגדרת הגבול קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{u_n}{v_n} > 1$ או $u_n > v_n$.

לכן לפי מבחן ההשוואה אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנס.

∎

תזכורת גבול של סדרה:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \iff \forall \varepsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$$

	
ייצוגי גרפי של סביבת הנקודה a על ישר המספרים. המרחק של כל מספר אשר נמצא בסביבה מנקודה a קטן מרדיוס הסביבה, המיוצג על ידי ε ויכול להיות קטן כרצוננו.	על גבי הישר הממשי המרחק בין שני מספרים מוגדר כערך המוחלט של ההפרש שלהם

משפט 3 (מבחן ההשוואה III): נתונים 2 טורים : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

אם לכל n מתקיים ש- $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$ (כאשר $u_n \ne 0,\ v_n \ne 0$):

א. מההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ נובעת ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

ב. מההתבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ נובעת ההתבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

הוכחה:

אם לכל n מתקיים ש- $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$ (כאשר $u_n \ne 0,\ v_n \ne 0$) אזי נקבל:

$\frac{u_2}{u_1} \le \frac{v_2}{v_1},\ \frac{u_3}{u_2} \le \frac{v_3}{v_2},\dots,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} \le \frac{v_n}{v_{n-1}}$, אם נכפיל את האי-שוויונים נקבל:

$\frac{u_n}{u_1} \le \frac{v_n}{v_1}$ או $u_n \le \frac{u_1}{v_1} \cdot v_n$, לפי משפט ההשוואה, נקבל את מה שרצינו.

∎

משפט 4 - מבחן המנה (דלמבר): אם קיים גבול לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

אז:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = D \Rightarrow \begin{cases} D<1 & \text{מתכנס} \\ D=1=? & \\ D>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

הוכחה:

א. נערוך השוואה לטור גיאומטרי (הנדסי) נתחיל המקום n=k

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q = \frac{q^{n+1}}{q^n} < 1$ כידוע לנו מטור גיאומטרי $\sum q^n$ כאשר $|q| < 1$ אז הטור מתכנס,

אז לפי מבחן ההשוואה, נקבל שהטור מתכנס, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

ב. מהאי שוויון $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$ נובע ש- $u_{n+1} > u_n$ לכן, הסדרה $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ חיובית מונוטונית ועולה,

לכן, $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$, כלומר, לא מתקיים תנאי הכרחי של התבדרות, לכן הטור מתבדר.

∎

משפט 5 - מבחן השורש (קושי): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ טור חיובי.

1. אם קיים $0 < \sqrt[n]{u_n} \le q < 1$ החל ממקום מסוים $(n \ge n_0)$ אז הטור מתכנס.
2. אם $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$ עבור אינסוף n-ים אז הטור מתבדר.

הוכחה:

נראה שאפשר להשוות את הטור לטור גיאומטרי (הנדסי).

נתבונן בטור ......+ $u_{n_0} + u_{n_0+1}$.

במקרה הראשון, מכיוון שהתכנסות או התבדרות היא תכונה של השארית של הטור (הזנב),

אפשר לכתוב: $u_{n_0} \le q^{n_0}$, $u_{n_0+1} \le q^{n_0+1}$

זאת אומרת, האיברים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ קטנים מהאיברים של הסדרה ההנדסית: q^{n_0}, q^{n_0+1},.....

ולפי משפט דלמבר באנלוגיה (בהשוואה) נקבל (C=q):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C \Rightarrow \begin{cases} C<1 \text{ מתכנס} \\ C=1=? \\ C>1 \text{ מתבדר} \end{cases}$$

∎

משפט מבחן לייבניץ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \quad , \quad (u_n \geq 0)$$

אם מתקיימים שני תנאים:

1. האיברים של הטור הם בירידה כלומר: $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ (מונוטונית יורדת).
2. אם $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

אז מכאן נובע שהטור **מתכנס**.

הוכחה: נתבונן בסכומים החלקיים לכל $n = 1, 2, 3, 4, ...$ כלומר:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + .. + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

מכיוון שהסדרה $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת, נובע שכל איברי הסדרה בסוגריים הם חיוביים.

לכן, מכאן נובע שהסדרה של סכומים חלקיים $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה.

נוכיח שהיא חסומה, כדי להוכיח ש- $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה נכתוב אותה בצורה אחרת:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

קיבלנו שלכל n שנבחר, נקבל ש- $S_{2n} < u_1$, כלומר, נקבל ש- $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה.

יש משפט שאומר שלכל סדרה מונוטונית וחסומה קיים גבול, לכן - $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

מהשוויון נובע ש- $S_{2n-1} = S_{2n} + u_{2n}$ וגם $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = 0$ לכן, קיבלנו ש- $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$,

לכן הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, מכאן נובע שהטור מתכנס ל-S.

∎

קריטריון קושי לטורים: נתון טור $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, הוא מתכנס אם ורק אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים N כך שלכל $N < n < m$ מתקיים ש- $\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| < \varepsilon$.

הוכחה:

- כיוון 1: נניח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ מתכנס, אז מכאן נוסע שהסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

  נשתמש בקריטריון קושי לסדרות שאומר שלכל $0 < \varepsilon$ קיים N כך שלכל $N < n$

ולכל p טבעי מתקיים ש- ε $\left|S_{n+p} - S_n\right| <$.

- כיוון 2: נניח שתנאי קושי מתקיים, לכן, לפי קריטריון קושי של סדרות, הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$מתכנסת, מכאן נובע שגם הטור מתכנס.

▮

טור הרמוני: הטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מכונה טור הרמוני והוא מתבדר.

הוכחה של טור הרמוני מתבדר דרך קריטריון קושי:

הוכחה: לפי קריטריון קושי, $\left|S_{2n} - S_n\right| < \varepsilon$ אזי:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +.... + \frac{1}{2n}| > n\frac{1}{2n}$$

מאחר ויצא לנו אי שוויון גדול מ-ε אזי לפי קריטריון קושי הטור מתבדר.

▮

התכנסות בהחלט: נתון הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ נרכיב בערך מוחלט את טור זה ונקבל טור חדש: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$

הוכחה: ההוכחה מתבססת על קריטריון קושי:

לכל $0 < \varepsilon$ קיים N כך שלכל $N < n$ ולכל p מספר טבעי מתקיים: $\varepsilon > [\left|u_{n+1}\right| +...+ \left|u_{n+p}\right|]$

צריך להוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס, נשתמש בתכונה של אי-שוויון המשולש:

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} +..+ u_{n+p}\right| \le \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+2}\right| +...+ \left|u_{n+p}\right| < \varepsilon$$

מכאן נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מקיים את קריטריון קושי, לכן הוא מתכנס.

▮

האינטגרל

אינטגרלים לא מסוימים

אינטגרל לא מסויים כותבים כך: $\int f(x)dx = F(x) + C\,,\ (\frac{x^{n+1}}{n+1})' = x^n$

המטרה היא למצוא פונקציה לפני גזירה $F(x)$ - פונקציה קדומה, C - קבוע.
בדיקה של הפעולה: $[F(x) + C]' = F'(x)$

תכונות של אינטגרל לא מסוים			
1	$\int f(x)dx = F(x) + C\,,\ F' = f$	5	$\int[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2($
2	$(\int f(x)dx)' = f(x)$	6	$\int \frac{f}{g}dx \neq \frac{\int f}{\int g}$ →**אסור**
3	$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$	7	$\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g$ →**אסור**
4	$\int k \cdot f(x)d = k \cdot \int f(x)dx$		

אינטגרלים מיידיים			
1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in R,\ n \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + c$
2	$\int 1 \cdot dx = x + c$	10	$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c$
3	$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} \cdot dx = ln\vert x\vert + c$	11	$\int e^x dx = e^x + c$

4	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + c$	12	$\int sin(x) \cdot dx =- cos(x) + c$
5	$\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tg(x) + c$	13	$\int cos(x) \cdot dx = sin(x) + c$
6	$\int \frac{dx}{sin^2(x)} =- c \cdot tg(x) + c$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin(\frac{x}{a}) + c$
7	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg(\frac{x}{a}) + c$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right\| + c$
8	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left\|\frac{x-a}{x+a} + c\right\|$	16	

דוגמאות:

חשבו את האינטגרל: $\int (2x^2 - 5x^3 + 7x - 3)dx$

$$\int (2x^2 - 5x^3 + 7x - 3)dx = \int 2x^2 dx - \int 5x^3 dx + \int 7x dx - \int 3dx =$$

$$= 2 \cdot \int x^2 dx - 5 \cdot \int x^3 dx + 7\int x dx - 3\int dx =$$

$$= 2 \cdot (\frac{x^3}{3} + c_1) - 5 \cdot (\frac{x^4}{4} + c_2) + 7 \cdot (\frac{x^2}{2} + c_3) - 3 \cdot (x + c_4) =$$

$$= (\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - 3x) + c^*$$

$$c^* = 2c_1 - 5c_2 + 7c_3 - 3c_4$$

חשבו את האינטגרל: $\int (\frac{x\sqrt{x} + 10 \cdot \sqrt[7]{x^2} - 3x}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^5}}) \cdot dx$

קודם נסדר אלגברית את השבר ואז נפעיל את האינטגרל:

$$\int(\frac{x\sqrt{x}+10\cdot\sqrt[7]{x^2}-3x}{x^2\cdot\sqrt[4]{x^5}})\cdot dx = \int(\frac{x^{\frac{3}{2}}+10x^{\frac{2}{7}}-3x}{x^{\frac{13}{4}}})dx = \int\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{13}{4}}}dx + 10\int\frac{x^{\frac{2}{7}}}{x^{\frac{13}{4}}}dx - 3\int\frac{x}{x^{\frac{13}{4}}}dx =$$

$$= \int x^{-\frac{7}{4}}dx + 10\int x^{-\frac{83}{28}}dx - 3\int x^{-\frac{9}{4}}dx = (\frac{x^{-\frac{7}{4}+1}}{-\frac{7}{4}+1} + c_1) + 10\cdot(\frac{x^{-\frac{83}{28}+1}}{\frac{83}{28}+1} + c_2) - 3\cdot(\frac{4}{5}x$$

$$= (-\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} + c_1) + 10(-\frac{28}{55}x^{-\frac{55}{28}} + c_2) - 3(\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + c_3) =$$

$$=-\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} + c_1 - \frac{56}{11}x^{-\frac{55}{28}} + 10c_2 - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} - 3c_3 =-\frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}} - \frac{16}{11\sqrt[28]{x^{55}}} + \frac{22}{5\sqrt[4]{x^5}} + c^*$$

$$c^* = c_1 + 10c_2 - 3c_3$$

חשבו את האינטגרל הבא: $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\cdot dx$

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\cdot dx = \int(2\cdot 3^2\cdot 5^3)^x dx = \int(2250)^x dx = \frac{(2250)^x}{ln(2250)} + c$$

חשבו את האינטגרל הבא: $\int(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}xdx$

תזכורת $dy = y'dx$, נפתור אינטגרל זה בעזרת שיטת ההצבה.

נסמן $1 + x^2 = t$ ונחשב דיפרנציאל של שני הצדדים $d(1 + x^2) = dt$

ונקבל: $2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dx$ נחזור לאינטגרל שלנו:

$$\int(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}xdx = \int t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\cdot t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3} + c = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

חשבון את האינטגרל הבא: $\int (x^2 - 3x + 1)^{10}(2x - 3)dx$

נסמן $t = (x^2 - 3x + 1)$, $d(x^2 - 3x + 1) = dt$, $(2x - 3)dx = dt$.

$$\int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{11} + c = \frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11} + c$$

חשבון את האינטגרל הבא: $\int (ln(t))^4 \cdot \frac{dt}{t}$

נסמן $ln(t) = x$, $d(ln(t)) = dx$, $\frac{1}{t}dt = dx$

$$=\int x^4dx = \frac{x^5}{5} + c = \frac{(ln(t))^5}{5} + c$$

חשבון את האינטגרל הבא: $\int (2sin(x) + 3cos(x))dx$

$$= 2\int sin(x)dx + 3\int cos(x)dx = 2(-cos(x) + c_1) + 3(sin(x) + c_2) = 2cos(x) + 3si$$

$$c^* = 2c_1 + 3c_2$$

חשבון את האינטגרל הבא: $\int \frac{sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

נסמן $t = \sqrt[3]{x}$, $t = x^{\frac{1}{3}}$, $x = t^3$, $dx = 3t^3dt$

$$\int \frac{sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int \frac{t^2 sin(t)dt}{t^2} = 3(-cos(t)) + c =- 3cos(\sqrt[3]{x}) + c$$

חשבו את האינטגרל הבא: $\int (2x + 1)^{30} dx$

נסמן $2x + 1 = t$, $d(2x + 1) = dt$, $2dx = dt$

$$\int (2x + 1)^{30} dx = \frac{1}{2}\int t^{30} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{31}}{31} + c = \frac{1}{62}(2x + 1)^{31} + c$$

חשבו את האינטגרל הבא: $\int sin(ax + b)dx$

נסמן $ax + b = t$, $d(ax + b) = dt$, $adx = dt$

$$\int sin(ax + b)dx = \frac{1}{a}\int sin(t)dt = -\frac{1}{a}cos(t) + c = -\frac{1}{a}cos(ax + b) + c$$

חשבו את האינטגרל הבא: $\int x^2\sqrt{x^3 + 5}dx$

נסמן $\sqrt{x^3 + 5} = t$, $x^3 + 5 = t^2$, $d(x^3 + 5) = d(t^2)$, $3x^2dx = 2tdt$

$$\int x^2\sqrt{x^3 + 5}dx = \frac{2}{3}\int t^2 dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{3} + c = \frac{2}{9}(\sqrt{x^3 + 5})^3 + c$$

חשבו את האינטגרל הבא: $\int \frac{(2ln(x)+3)^3}{x}dx$

נסמן $2ln(x) + 3 = t$, $d(2ln(x) + 3) = dt$, $2 \cdot \frac{1}{x}dx = dt$,

$$\int \frac{(2ln(x)+3)^3}{x}dx = \int \frac{tdt}{2} = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{8}t^4 + c = \frac{1}{8}(2ln(x) + 3)^4 + c$$

חשבון את האינטגרל **המוכר**: $\int \frac{1 \cdot dx}{x^2+a^2}$

$$\int \frac{1 \cdot dx}{x^2+a^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{\frac{x^2+a^2}{a^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+(\frac{x}{a})^2} = \int \frac{\frac{1}{a}d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a}) + c$$

חשבון את האינטגרל **המוכר**: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsin(\frac{x}{a}) + c$$

חשבון את האינטגרל הבא: $\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x^2}}$

בדרך האלגברית: $\frac{m \cdot \frac{1}{a}}{n \cdot \frac{1}{a}} = \frac{\frac{m}{a}}{\frac{n}{a}} = \frac{m}{n}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{2-7x^2}}{\sqrt{7}}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{7}}}{\sqrt{\frac{2}{7}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{\frac{2}{7}})^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}arcsin(\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{2}}) + c$$

שאלה: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin(\frac{x}{a}) + c$

פתרו את האינטגרל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{7}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{(\frac{2}{7})^2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot arcsin(\frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{2}}) + c$$

שאלה: $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$

נסמן $t = \sqrt{2x-9}$, $x = \frac{t^2+9}{2} \Rightarrow dx = d(\frac{t^2+9}{2}) \Rightarrow dx = tdt$

ולכן, $\int \frac{tdt}{(\frac{t^2+9}{2})\cdot t} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{2}{3} arctg(\frac{t}{3}) + c$

שאלה: $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$

נסמן $x^5 = t$, $d(x^5) = dt \Rightarrow 5x^4 dx = dx$

ולכן, $\frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-(\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{5} \cdot ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}\right| + c$

שאלה: $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+5} = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2-1+5} = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2+2^2} =$

נסמן $t = (x^2+1)$, $2xdx = dt$

$$= \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2} \cdot arctg(\frac{x^2+1}{2}) + c$$

נסתכל על האינטגרל $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

ידוע לנו בפונקציות כי אפשר $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

ידוע לנו כי החוק **אסור**← $\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g$ אז נעזר בשברים חלקיים:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)} \backslash \cdot (x-a)(x+a)$$
$$1 = A(x+a) + B(x-a)$$

נמצא גורמים מאפסים:

בעבור x=a: נקבל $1 = 2aA \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

בעבור x=-a: נקבל : $B = -\frac{1}{2a}$

וכעת נציב את A,B ונקבל: $\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{(x+a)}$ ונציב באינטגרל

ונקבל:

$$\frac{1}{2a} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)} - \frac{1}{2a} \cdot \int \frac{dx}{(x+a)} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

שאלה: $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-5}$

נסמן: $e^{2x} = t$, $2e^{2x}dx = dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + c = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right| + c$$

שאלה: $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5}$

נסמן:

$$2e^{2x}dx = dt\ , t = e^{2x}$$

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} arctg(\frac{t}{\sqrt{5}}) + c = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot arctg(\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}) + c$$

אינטגרציה בחלקים

אינטגרציה בחלקים פותר אינטגרציה ממשפחת הפונקציות הבאות:

$\int R(sin(x), cos(x), tg(x), arctg(x), ln(x), e^x,....)dx$ ועוד...

↩ יהיו u,v ומתקיים $\int udv = uv - \int vdu$

↩ או $\int u(x)v'(x)dx = uv - \int v \cdot u' \cdot dx$

- שאלה: $\int ln(x)dx$ שום אינטגרציה לא עוזר במקרה זה חוץ מ אינטגרציה לחלקים.

זה צריך להיות יותר פשוט מהאינטגרל המקורי	טבלה לחלקים	
$\int udv = uv - \int vdu = xln(x) - \int dx$	$du = \frac{1}{x}dx$	u=ln(x)→
$dv = xln(x) - x + c$	$v = x$	dv=dx→

- שאלה: $\int arctg(x)dx$, נעשה טבלה:

זה צריך להיות יותר פשוט מהאינטגרל המקורי	טבלה לחלקים	
$\int udv = uv - \int vdu = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx$ נסמן $2xdx = dt, t = 1 + x^2$	$\frac{dx}{1+x^2} = du$	u=arctg(x)→
$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot ln\left|1 + x^2\right| + c$ עדיין לא סיימנו, בסוף לתוצאה הסופית נקבל: $= xarctg(x) - \frac{1}{2} \cdot ln\left|1 + x^2\right| + c$	$v = x$	dv=dx→

- שאלה: $\int x \cdot sin(x) \cdot dx$

זה צריך להיות יותר פשוט מהאינטגרל המקורי	טבלה לחלקים	
$= uv - \int vdu = -xcos(x) + \int cos(x)dx =$	$du = 1 \cdot dx$	u=x→
$= - x \cdot cos(x) + sin(x) + c$ נשנה סימנים בטבלה למטה:	$v = - cos(x)$	sin(x)dx=dv→

	טבלה לחלקים	
$= uv - \int vdu = \frac{x^2}{2}sin(x) - \int \frac{x^2}{2}cos(x)dx =$ הגענו למצב של אינטגרל $\int \frac{x^2}{2}cos(x)dx$ שהוא יותר מסובך מהאינטגרל מהטבלה הקודמת $\int cos(x)dx$, לא תמיד נגיע למצב שיותר פשוט מהאינטגרל המקורי, איך נדע לסמן את מה?	$v = \frac{x^2}{2}$	xdx=dv→
- אין חוקיות כאן, זה הכל עניין של ניסיון וניסוי וטעייה. - באינטגרציה בחלקים צריך להשתמש בסימנים (u,dv) ככה שיווצר אינטגרל יותר פשוט מהמקורי ובמקרה זה, קרה לנו ההפך מפשוט.	$cos(x)dx = d$	sin(x)=u→

- שאלה: $\int x^2 e^x dx$

זה צריך להיות יותר פשוט מהאינטגרל המקורי

$$v = uv - \int vdu = x^2 \cdot e^x - 2\int e^x \cdot x \cdot dx =$$

הרווחנו שירדנו ממעלה 2 ב-x למעלה 1 באינטגרל אבל זה לא מספיק לנו ולכן נצטרך לעשות עוד אינטגרציה בחלקים פעם שניה:

$$\int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + c$$

ולכן נקבל בתוצאה הסופית:

$$x^2e^x - 2[xe^x - e^x + c]$$

טבלה לחלקים	
$du = 2x \cdot dx$	$u = x^2 \rightarrow$
$v = e^x$	$dv = e^x dx \rightarrow$

טבלה לחלקים לאינטגרל $\int e^x \cdot x \cdot dx$	
dx=du	u=x
$v = e^x$	$e^x dx = dv$

- שאלה: $\int e^x \cdot sin(x) \cdot dx$

זה צריך להיות יותר פשוט מהאינטגרל המקורי

$$uv - \int vdu = \quad - e^x cos(x) + \int e^x cos(x)dx =$$

אינטגרציה בחלקים פעם שניה:

$$\int udv = uv - \int vdu = e^x sin(x) - \int e^x sin(x$$

$$\int e^x sin(x)d =- e^x cos(x) + e^x sin(x) - \int e^x si$$

מאחר וקיבלנו את האינטגרל המקורי, נחלק ב-2 ונקבל בפתרון הסופי את:

$$\frac{1}{2}[e^x cos(x) + e^x sin(x)] + c$$

טבלה לחלקים	
$du = e^x dx$	$u = e^x \rightarrow$
$v =- cos(x)c$	$dv = sin(x)dx \rightarrow$

טבלה לחלקים לאינטגרל $\int e^x cos(x)dx$	
$du = e^x dx$	$u = e^x \rightarrow$
$v = sin(x)$	$dv = cos(x)dx \rightarrow$

- שאלה: $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$

זה צריך להיות יותר פשוט מהאינטגרל המקורי

$$udv = uv - \int vdu = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

טבלה לחלקים

$u = \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow$	$du = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$ $= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ קיבלנו אינטגרל בדיוק כמו המקורי לכן נחלק ב-2 ונקבל: $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}arcsin(\frac{x}{a}) + c$
$dv = dx \rightarrow$	$v = xdx$	

אינטגרציה של פונקציות רציונליות

$$R(x) = \frac{Pm(x)-a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_n}{Qm(x)-b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$$

אם $b_0,..., b_n$ $n \geq m$ והוא מדומה ואז אפשר לחלק מונה במכנה כלומר:

$$\int R(x)dx = \int R_1(x)dx + \int \frac{P_{1m}(x)}{Q_n(x)}dx$$

ואם $n < m$ והוא פשוט.

שאלה: $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$

במונה יש לנו פולינום 1 מגובה 0, במכנה יש לנו פולינום x מגובה 2.

אפשר לשנות את המכנה לביטוי הבא: $x^2 + 6x + 25 = (x + 3)^2 - 9 + 25 = (x + 3)^2 + 4^2$

אז נשנה את האינטגרל לצורה הבאה וציין כי $xd = d(x+3)$ ונקבל:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2} = \frac{1}{4} arctg(\frac{x+3}{4}) + c$$

שאלה: $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}$

במונה יש לנו פולינום 1 מגובה 0, במכנה יש לנו פולינום x מגובה 2.

אפשר לשנות את המכנה לביטוי הבא: $x^2 - x + \frac{3}{2} = (x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{2})^2$

אז נשנה את האינטגרל לצורה הבאה וציין כי $xd = d(x - \frac{1}{2})$ ונקבל:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}) + c$$

שאלה: $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+6} = \int [\frac{\frac{3}{2}\cdot(2x-4)-1+6}{(x^2-4x+6)}]dx$

$$\int [\frac{\frac{3}{2}\cdot(2x-4)-1+6}{(x^2-4x+6)}]dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{(x^2-4x+6)} + 5\int \frac{dx}{(x^2-4x+6)} =$$

נציין ש- $(2x - 4)dx = d(x^2 - 4x + 6)$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+6)}{(x^2-4x+6)} + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2} ln\left|x^2 - 4x + 6\right| + \frac{5}{\sqrt{2}} arctg(\frac{x^2}{\sqrt{2}}) + c$$

שאלה: $\int \frac{(2x^2+3)xdx}{(x^4+x^2+1)} = \int (\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}) \cdot dx$,

נסמן

$t = x^2$, $dt = 2xdx$.

$$\frac{dt}{\ldots 1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}ln\left|t^2 + t + 1\right| + \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|x^4 + x^2 + 1\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}) + c$$

שאלה: $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx$

נסמן $\sqrt{3x + 5} = t \Rightarrow 3x + 5 = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-5}{3} \Rightarrow 3dx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{3}$

$$\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx = \int \frac{2}{3}\frac{t\cdot tdt}{(\frac{t^2-5}{3})} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-5} = 2\int \frac{(t^2-5)+5}{(t^2-5)}dt = 2\int dt + 10\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2} =$$

$$= 2t + \frac{10}{2\sqrt{5}} \cdot ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| = 2t + \sqrt{5} \cdot ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{3x + 5} + \sqrt{5} \cdot ln\left|\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}\right|$$

- טריק חשוב לפתרון אינטגרלים:

$$\int \frac{x\cdot dx}{x+a} = \int \frac{(x+a)-a}{(x+a)}dx = \int dx - a\int \frac{dx}{x+a} = x - a \cdot ln|x - a| + c$$

שאלה: $y' = \frac{9+\sqrt{x}}{x^2}$ למצוא את y אם $y(9) = 0,\ x = 9,\ y = 0$

$$y = \int(\frac{9+\sqrt{x}}{x^2})dx = \int 9 \cdot x^{-2} \cdot dx - \int x^{-2}x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = 9\frac{x^{-1}}{-1} + \int x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$=- \frac{9}{x} + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c =- \frac{9}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$y(x) =- \frac{9}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c\ ,\ y(9) =- \frac{9}{9} - \frac{2}{3} + c = 0\ ,\ c = \frac{5}{3}$$

$$\int \frac{P_1(x)dx}{a(x-x_1)(x-x_2)\cdot....\cdot(x-x_m)}$$

אם $x_1, x_2, ..., x_m$ שורשים ממשיים, אפשר לפרק לשברים חלקיים,

$$\frac{P_1(x)dx}{a(x-x_1)(x-x_2)\cdot....\cdot(x-x_m)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_2)^{m-1}} + ... + \frac{A_m}{(x-x+m)^1}$$

אם $x_1, x_2, ..., x_m$ שורשים מרוכבים,

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+Px+q)^m} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+Px+q)^{m-1}} + ... + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+Px+q)^1} + ...$$

לפי השוואת מקדמים נמצא את: $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m, C_1, C_2, ..., C_m$.

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-4)} \backslash \cdot (x-1)(x-2)(x-4)$$

$$x^2 + 2x + 6 = A_1(x-2)(x-4) + A_2(x-1)(x-4) + A_3(x-1)(x-2)$$

אם $x = 1$: $A_1 = 3$

אם $x = 2$: $A_2 =- 7$

אם $x = 4$: $A_3 = 5$

אז נציב באינטגרל המקורי ונקבל:

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx = \int (\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-4)})dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-4} =$$

$$3 \cdot ln|x-1| - 7 \cdot ln|x-2| + 5 \cdot ln|x-4| + c = ln(\frac{|x-1|^3}{|x-2|7}(x-4)^5) + c$$

פתרו את האינטגרל $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx$

מאחר ומדובר פה בשבר פשוט ניקח את $\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$ונבצע שברים חלקיים,

נשים לב כי יש לנו ארבעה שורשים:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^1} + \frac{B}{(x+3)} \backslash \cdot (x-1)^3(x+3)$$

$$x^2 + 1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x-1)^2(x+3) + B(x-1)^3$$

יש לנו ארבעה שורשים, $x = 1,\ x =- 3$

כאשר $x = 1$ נקבל $A_1 = \frac{1}{2}$

כאשר $x =- 3$ נקבל $B =- \frac{5}{32}$

אבל נשאר לנו למצוא עוד 2 שורשים כי עוד לא מצאנו את $A_{2,3}$.

אם נפתח את כל הסוגריים במשוואה ונסדר את החזקות בסדר יורד (x^3, x^2, x^1, x^0) נקבל:

$$x^2 + 1 = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + Bx^3$$

$$x^2 + 1 = (A_1x + 3A_1) + (A_2x^2 + 2A_2x + 3) + (A_3x^2 - 2A_3x + 2A_3)(x+3) + B(x^3 - 3x^2 + 3x -$$

אם נפתח סוגריים נקבל (בהשוואה עם אגף שמאל):

$$0x^3 + 1x^2 + 1 = (x^3 +...) + (x^2 +...) + (x^1 +...) + (x^0 +...)$$

ובסופו של דבר נקבל:

$$A_2 = \frac{3}{8},\ A_3 = \frac{5}{32},\ A_1 = \frac{1}{2},\ B = -\frac{5}{32}$$

כעת נחזור לאינטגרל שלנו ונציב:

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx = \int \left(\frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^1} + \frac{B}{(x+3)}\right)dx = \int \frac{A_1}{(x-1)^3}dx + \int \frac{A_2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{A_3}{(x-1)}dx + \int$$

$$\frac{1}{2}\int (x-1)^{-3}dx + \frac{3}{8}\int (x-1)^{-2}dx + \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}ln|x-1| - \frac{5}{32}$$

פתרו את האינטגרל: $\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x^3-1)} = \int \frac{dx}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)}$

יש לנו כאן 5 שורשים, מרוכבים $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_{4,5} =$

נסדר לפי ירידה:

$$\frac{1}{x^2\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \backslash \cdot x^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x)(x-1)(x^2+x+1) + C(x^2)(x^2+x+1) + (Dx+E)(x^2)(x-1$$

מיד אפשר לגלות 2 מקדמים לפי שורשים 0 ו-1:

אם x=0 נקבל $A = \ -1$

אם x=1 נקבל $C = \frac{1}{3}$

$$1 = A(x^3+x^2+x-x^2-x-1) + B(x^4+x^3+x^2-x^3-x^2-x) + C(x^4+x^3+x^2) + (Dx+E)($$

$$1 = A(x^3-1) + B(x^4-x) + C(x^4+x^3+x^2) + D(x^4) + E(x^3) - D(x^3) - E(x^2)$$

נקבל את מערכת המשוואות הבאה (הכל שווה לאפס מאחר ואנחנו משווים לצד שמאל של המשוואה הראשית $0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x...$) נעשה השוואת מקדמים:

$$B + C + D = 0$$
$$A + C + E - D = 0$$
$$C - E = 0$$

ונקבל את הפתרונות: $B = 0,\ D = -\frac{1}{3},\ E = \frac{1}{3}$

נציב באינטגרל הראשי ונקבל:

$$\int\frac{dx}{x^2\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = \int\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}\right)dx = -\int\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$\frac{1}{x^5-x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

וכעת נפתור את האינטגרלים:

$$-\int\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

מאחר ו-$x^2 + x + 1$ הוא חיובי תמיד (יש חיבור בין כולם) נוריד מערך מוחלט:

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

פתרו את האינטגרל: $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$

נעשה חילוק ארוך עם שארית ונקבל: $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int (x + 3 + \frac{3x+1}{x^2+2})dx$

$$\int (x + 3 + \frac{3x+1}{x^2+2})dx = \int xdx + 3\int dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 3\int \frac{xdx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}ln\left|x^2 + 2\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$

אנו מסתכלים על שבר מדומה כלומר $(P_m(x),\ Q_n(x)\ ,\ m \geq n)$.

נעשה חילוק פולינום ונקבל: $1 + \frac{4x-3}{x^2-4x+3}$ אחרי חלוקה ולכן:

$$\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+3} = \int 1 \cdot dx + \int \frac{4x-3}{x^2-4x+3}dx$$

כעת נעשה שברים חלקיים:

$$\frac{4x-3}{x^2-4x+3} = \frac{4x-3}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)} \backslash \cdot (x - 3)(x - 1)$$

$$4x - 3 = A(x - 1) + B(x - 3)$$

נציב x=3 ונקבל: $B =- \frac{1}{2}$

נציב x=1 ונקבל: $A = \frac{9}{2}$.

כעת נציב באינטגרל הראשי ונקבל:

$$\int 1 \cdot dx + \int \frac{4x-3}{x^2-4x+3}dx = x + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = x + \frac{9}{2}ln|x - 3| - \frac{1}{2}ln|x - 1| + c$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{x^2}{(x-1)^5}dx$

שברים חלקיים: $\frac{x^2}{(x-1)^5} = \frac{A_1}{(x-1)^5} + \frac{A_2}{(x-1)^4} +...$ זה המון עבודה, יש לנו שיטה קלה יותר לחסוך את תהליך הפתרון, נסמן $t = x - 1$, $dx = dt$ ונקבל:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^5}dx = \int \frac{(t+1)^2 dt}{t^5} = \int \frac{t^2+2t+1}{t^5}dt = \int \frac{dt}{t^3} + 2\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dx}{t^5} = \int t^{-3}dt + 2\int t^{-4}dt + \int t^5 dt =$$

$$= -\frac{t^{-2}}{2} + 2\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-4}}{-4} = -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4}$$

נציב בחזרה לאינטגרל המקורי:

$$I = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4}$$

אינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות

משפחת הפונקציות הבאה הם פונקציות טריגונומטריות:

$$\int R(sin(x),\ cos(x),\ tg(x),\ cotg(x),...)dx$$

הצבה אוניברסלית (הצבה הכי מקובלת)

$$cos(x) = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ sin(x) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$tg(\frac{x}{2}) = t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$tg(\frac{x}{2}) = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arcctg(t) \Rightarrow x = 2arcctg(t) \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

כללי הצבה טריגונומטרית באינטגרלים

1. $\int R(sin(x), cos(x))dx$

אם פונקציה $R(\sin x, \cos x)$ לא משתנה לפי החלפה
$(sin(x), cos(x)) \rightarrow (-\ sin(x), -\ cos(x))$
זאת אומרת יש לפונקציה מחזור של 2Π אז משתמשים בהצבה $tg(x) = t$.

2. אם פונקציה $R(\sin x, \cos x)$ משנה סימן רק בהחלפה $(x) \leftarrow (-\ x)$
זאת אומרת פונקציה אי זוגית של x, אז משתמשים בהצבה $cos(x) = t$.
3. אם פונקציה $R(\sin x, \cos x)$ משנה סימן רק בהחלפה $(\Pi - x) \rightarrow x$ אז נציב $sin(x) = t$.

עבור פונקציות מהצורה $\sin^m x \cos^n x,\ m, n \in Z$
אם m אי-זוגית נציב: $\cos x = t$ ואם n אי זוגית נציב $\sin x = t$.

2 אינטגרלים חשובים ביותר

$$\int cos^2(x)dx,\ \int sin^2(x)dx$$

בזהויות האלה: $cos^2(\alpha) = \frac{1+cos(2\alpha)}{2}$, $sin^2(\alpha) = \frac{1-cos(2\alpha)}{2}$, אז נקבל:

$$\int cos^2(x)dx = \int \frac{1+cos(2x)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int cos(2x)dx$$

$$\int sin^2(x)dx = \int (\frac{1-cos(2x)}{2})dx = \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int cos(2x)dx$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{sin(x)+sin^3(x)}{cos(2x)}dx$

$$R(x) = \frac{sin(x)+sin^3(x)}{cos(2x)}, R(-x) = \frac{sin(-x)+sin^3(-x)}{cos(-2x)} = \frac{-sin(x)-sin^3(x)}{cos(2x)}$$

$$cos(x) = t,\ d(cos(x)) = dt,\ -sin(x)dx = dt$$

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \Rightarrow sin^2(x) = 1 - t^2 \Rightarrow cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) \Rightarrow cos(2x) = 2t^2 - 1$$

$$\int \frac{sin(x)+sin^3(x)}{cos(2x)}dx = \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{(t^2-2)dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2}\int (\frac{2t^2-4}{2t^2-1})dt = \frac{1}{2}\int (\frac{2t^2-1-3}{2t^2-1})dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1}{2t^2-1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-}$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{(\sqrt{2}\cdot t)^2-1} = \frac{1}{2}cos(x) - \frac{3}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{2}\cdot cos(x)-1}{\sqrt{2}\cdot cos(x)+1}\right| + c$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{dx}{4sin(x)+3cos(x)+5}$

כעת נציב את הזהויות שלנו:

$$\int \frac{dx}{4sin(x)+3cos(x)+5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int (t + 2)^{-2}dt = \frac{(t+2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{tg(\frac{x}{2})+}$$

הצבות עזר:

$$tg(x) = t \to x = arctg(t) \Rightarrow sin(x) = \frac{tg(x)}{\sqrt{1+tg^2(x)}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{dx}{sin^2(x)+2sin(x)cos(x)-cos^2(x)}$

$$\int \frac{dx}{sin^2(x)+2sin(x)cos(x)-cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{(t+1)-\sqrt{2}}{(t+1)+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{(tg(x)+1)-\sqrt{2}}{(tg(x)+1)+\sqrt{2}}\right| + c$$

ניתן לפתור אינטגרל זה גם בדרך אחרת אם נחלק ל- $cos^2(x)$.

פתרו את האינטגרל הבא: $\int sin^m(x) \cdot cos^n(x) \cdot dx$

$$\int sin^4(x) \cdot cos^5(x) \cdot dx = \int sin^4(x) \cdot cos^4(x) \cdot cos(x) \cdot dx = \int sin^4(x) \cdot cos^4(x) \cdot d(sin(x)) =$$

$$= \int sin^4(x)(1 - sin^2(x))^2 \cdot d(sin(x))$$

נסמן $sin(x) = t$

$$\int t^4(1 - t^2)^2 dt =... = \frac{1}{5}sin^5(x) - \frac{2}{7}sin^7(x) + \frac{1}{9}sin^9(x)$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int (sin^2(x) \cdot cos^2(x))dx$

$$\int (sin^2(x) \cdot cos^2(x))dx = \int (sin(x) \cdot cos(x))^2 dx = \frac{1}{4}\int (sin(2x))^2 dx = \frac{1}{4}\int (sin^2(2x))dx =.. =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{3^2} \cdot sin(4x) + c$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int cos^6(x)dx$

$$\int cos^6(x)dx = \int (cos^2(x))^3 dx = \int (\frac{1+cos(2x)}{2})^3 dx = ... = \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}sin(2x) + \frac{3}{64}sin(4x) - \frac{1}{48}sin^2(2x) +$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int sin(2x) \cdot cos(5x)dx$

$$\int sin(2x) \cdot cos(5x)dx = \frac{1}{2}\int [sin(7x) + sin(-3x)]dx = ... = -\frac{1}{14} \cdot cos(7x) + \frac{1}{6} \cdot cos(3x) + c$$

לגבי האינטגרלים הבאים: $\int \frac{dx}{sin(x)}$, $\int \frac{dx}{cos(x)}$, איך מוצאים את האינטגרלים שלהם?

$$\int \frac{dx}{sin(x)} = \int \frac{sin(x) \cdot dx}{sin^2(x)} = -\int \frac{d(cos(x))}{1-cos^2(x)} = \int \frac{dt}{t^2-1^2} = ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = ln\left|\frac{cos(x)-1}{cos(x)+1}\right| = ... = ln\left|tg(\frac{x}{2})\right| + c$$

פתרו את האינטגרל הבא: $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$

נסמן

$$x = a \cdot sin(t) \Rightarrow dx = a \cdot cos(t) \cdot dt$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2 \cdot sin^2(t)}}{a \cdot sin(t)} \cdot a \cdot cos(t) \cdot dt = \int \frac{\sqrt{a^2(1-sin^2(t))}}{a \cdot sin(t)} \cdot a \cdot cos(t) \cdot dt = \int \frac{a \cdot cos(t)}{a \cdot sin(t)} \cdot a \cdot cos(t)$$

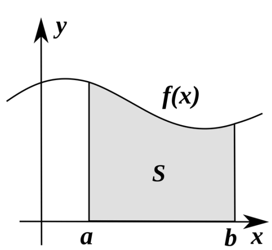
$$= a\int \frac{cos^2(t) \cdot dt}{sin(t)} = a\int \frac{(1-sin^2(t))}{sin(t)}dt = a\int \frac{dt}{sin(t)} - a\int sin(t)dt = ... = a \cdot ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

זהויות טריגונומטריות	
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$
$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

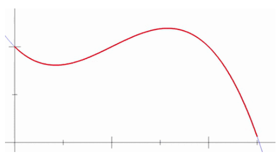
$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot$
$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha - \cos\beta =- 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha$
$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$	$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot$	$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$	$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = 1 - \sin^2\alpha$
$\sin\alpha\sin\beta =- \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos($	$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 1 - \cos^2\alpha$	$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha$

אינטגרלים מסוימים

הכוונה באינטגרל המסוים היא לאינטגרל של פונקציה, אבל באיזשהו תחום. ראינו שהאינטגרל הלא מסוים נותן פונקציה קדומה. הכוונה באינטגרל על תחום היא בעצם להצבת ערכי התחום באופן מסוים בפונקציה הקדומה.

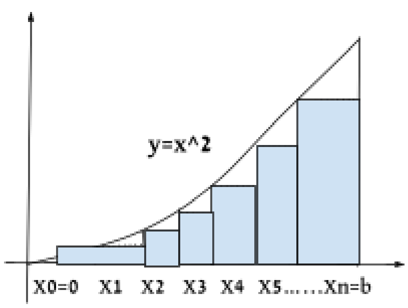


אינטגרל רימן



הרעיון הבסיסי השיטת של רימן הוא להשתמש בקירובים פשוטים מאוד לאזור S על ידי קירובים מלבניים שקטנים לפי החלוקה, אנו יכולים לומר כי "בגבול" (כאשר מספר המלבנים שאנו מודדים גדל לאינסוף) אנו מקבלים בדיוק את שטח S מתחת לגרף.נבחין כי f יכול להיות חיובי ושלילי כאחד, ההגדרה של S משתנה כך שהאינטגרל תואם את האזור התחום מתחת לגרף של f: כלומר, האזור שמעל ציר x מינוס השטח שמתחת לציר x. ניתן להסתכל על האינטגרל אם כן כדרך חישוב ל"שטח עם סימן".

שאלת דוגמא:



נתונה $y = x^2$ פרבולה מעל הקטע $[0, b]$ צריך למצוא את שטח S.

בבית הספר מלמדים כך $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ אבל אנו נוכיח לפי רימן

ש-$s = \frac{1}{3}$. נוכיח לפי רימן שהפתרון נכון: b= 1 , a=0 והקטע שלנו הוא

$f(x) = x^2$,$[0, 1]$,

נחלק את הקטע $[0, 1]$ ל-n חלקים$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$

הערכים של הנקודות הם- $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ldots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = \frac{n}{n} = 1$

נציג אותם בצורה הבאה $x_k = c_k$הערכים של הפונקציות בנקודות האלה הם:

$$f(c_1) = (\tfrac{1}{n})^2,\quad f(c_2) = (\tfrac{2}{n})^2,\quad f(c_3) = (\tfrac{3}{n})^2,\ldots,\quad f(c_n) = (\tfrac{n}{n})^2,\quad f(0) = 0$$

סכום רימן מורכב כך: $\sum_{k=0}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, ציינו כבר ש-$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ וגם $f(c_k) = (\frac{k}{n})^2$

ולכן: $f(c_k)\Delta x_k = (\frac{k}{n})^2\frac{1}{n}$. כעת נחשב את הגבול

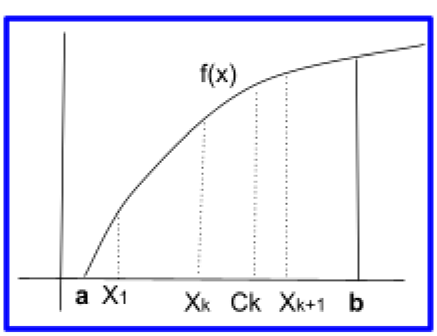
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f(C_k)\cdot\Delta x_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n})^2\cdot(\tfrac{1}{n})\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\cdot n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\cdot dx = \frac{1}{3} = S$$

פונקציה אינטגרבילית והאינטגרל המסוים

ניקח קטע $[a, b]$ אינטגרציה נשים לב ש- $x_k \le C_k \le x_{k+1}$

נגדיר פונקציה $f(x)$ חסומה בקטע $[a, b]$,



כלומר $\forall x \in [a,b]$ קיים M כך ש-$|f(x)| \leq M$ וגם $m \leq f(x) \leq M$.

נחלק את $[a,b]$ לתת קטעים: $[a,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},b]$
ונציין ש-$a < x_1 < x_2 <...< x_{n-1} < b$

ניקח $\forall C_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $(0 \leq k \leq n-1)$
ונבנה סכום רימן: $\sigma = f(C_0)\cdot(x_1-a) + f(C_1)\cdot(x_2-x_1) +...+ f(C_{n-1})(b-x_{n-1})$
ניתן לכתוב גם כסיגמא: $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(C_k)(x_{k+1}-x_k)$

אורך מקסימלי של קטע C_k נסמן ב-λ: $\lambda = \max_{0\leq k\leq n-1}(x_{k+1}-x_k)$,
אם $\lambda \to 0$ כאשר $n \to \infty$ אזי קיים מקרה ש- σ שואף למספר כלשהו זאת אומרת שיש גבול ל-σ.

הגדרה
אנו אומרים שסכום רימן σ מתכנס למספר I אם לכל $\varepsilon > 0$ כאשר $\lambda < \eta$
קיים $\eta(\varepsilon) > 0$ כך ש-$|I - \sigma| < \varepsilon$ וזה שקול ל-$I = \lim_{\lambda\to 0}\sigma$.

הגדרה
אנו אומרים שפונקציה $f(x)$ **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם סכום רימן מתכנס כאשר $\lambda \to 0$
ולגבול של סכום רימן קוראים אינטגרל מסוים בקטע $[a,b]$ ומסמנים:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(C_k)\Delta x_k\right), \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

משפט/קריטריון קושי

משפט

$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = I \Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים η שני מספרים $\lambda'' < \eta, \lambda' < \eta$ כך ש- ε $|\sigma' - \sigma''| <$.

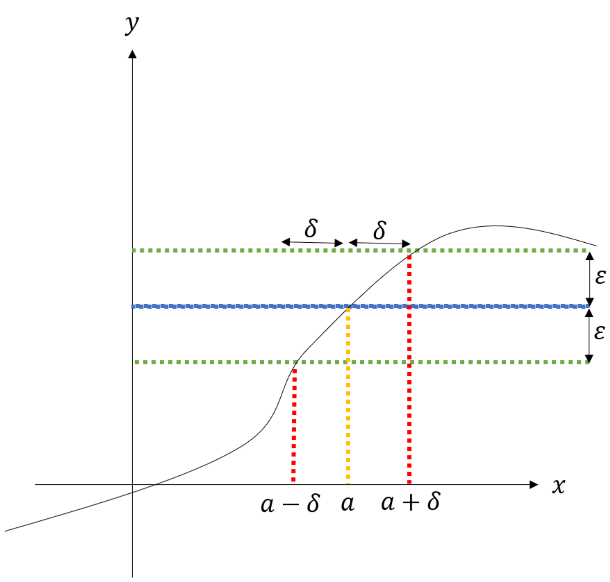
כאשר σ', σ'' הם סכומי רימן לפי חלוקות λ', λ''.

הוכחה:

- חלק א': נתבונן בסדרה של $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, ...$ כך שלכל σ מתאימה $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, ...$
כאשר $\lambda_n \to 0$ ניקח $\varepsilon > 0$ שנשתמש בתנאי של המשפט,
$(\eta > 0)$ בגלל ש $\lambda_n \to 0$ אזי תמיד קיים $N(\eta)$ המקיים $n > m > N$ כאשר $\left|\lambda_n - \lambda_m\right| < \eta$
לפי תנאי המשפט ε $\left|\sigma_n - \sigma_m\right| < $ $\Leftarrow$ $\lim_{\lambda\to 0} \sigma = I$.
- חלק ב': נניח הכרחיות זאת אומרת ש- $\sigma \leftarrow I$.
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\eta > 0$ כך ש- $\lambda_n < \eta$ וגם $\left|\sigma_n - I\right| < \varepsilon$
הבחירה אפשרית בגלל ש- $\lambda_n \to 0$ וגם כי $\sigma_n \to I$ לפי תנאי הכרחיות אז אם λ אורך של קטע מקסימלי $\lambda < \eta$ וגום $\lambda_n < \eta$ אזי $\left|\sigma - \sigma_n\right| < \varepsilon$

∎

- מושג אינטגרל רימן רלוונטי רק לפונקציות **חסומות**.
- η= הסביבה של הארגומנט וה-λ נמצאת בתוך הסביבה של ה-η,
כלומר הסימן מסמן את δ $|x - c| <$ כאשר $c - \delta < x < c + \delta$,
וזה סביבתη.בנוסף מצאנו על ציר ה-x.



סכומי דרבו

אינטגרל אינטגרבילי אם קיים$\int_a^b f(x)dx$

ניקח פונקציה $f(x)$ חיובית חסומה בקטע $[a, b]$ נסמן חסם עליון M וחסם תחתון m

כך שמתקיים $M \le f(x) \le m$ נחלק את קטע $[a, b]$ ל$x_0 = a < x_1 < x_2 <... < x_{n-1} < x_n = b$

נבחר קטע $[x_k, x_{k+1}]$ובקטע נסמן (m_k, M_k)ונרכיב את הסכום:

$$S = M_0(x_1 - a) + M_1(x_2 - x_1) +... + M_{n-1}(b - x_{n-1})$$

סכום דרבו עליון S_M	סכום דרבו תחתון s_m
$S_M = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$	$s_m = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$

לפי ההגדרות $[m_k, M_k] \equiv [x_{k+1}, x_k] \wedge [M, m] \equiv [a, b]$

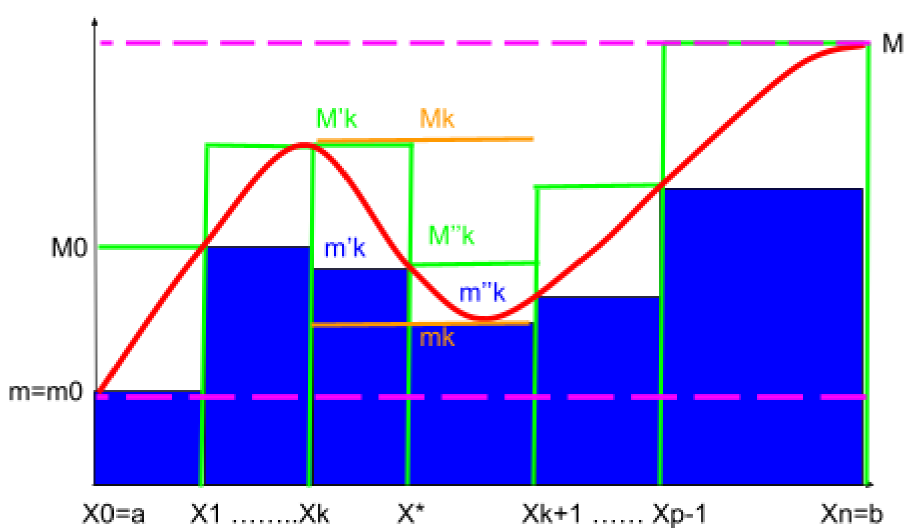
$$S_M \ge s_m \wedge m \le m_k \le M_k \le M$$

ומתקיים $m\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \le S \le M\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)$

נשתמש $\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = b - a$ והכל מצטמצם לנו חוץ מהאיבר הראשון והאחרון.

$m(b - a) \le S \le M(b - a)$וזה מקביל גם לגבי s (קטן) כלומר $m(b - a) \le s \le M(b - a)$.

- אם f חיובית חסומה ב-$[a, b]$,
  נניח $M \le f(x) \le m$ אז, $[\,m(b - a) \le$ השטח מתחת לגרף $\le M(b - a)\,]$.



איור עזר להוכחה הבאה

משפט נסמן את I כך: $\bar{I}$ סופרמום ואת $\underline{I}$ אינפימום ומתקיים $\underline{I} \geq \bar{I}$. כלומר אף סכום עליון לא קטן מאף סכום תחתון.

הוכחה

ידוע הרכבה של s,S כך ש-$s \leq S$,

ניקח חלוקה p כלשהי של הקטע $[a, b]$ כך ש- $a < x_1 < x_2 <... < x_{p-1} < b$.

נסמן בהתאמה סכומי דרבו S_1, s_1 ונציג את הסכומים:

$$S_1 = M_0(x_1 - a) +... + M_{p-1}(b - x_{p-1})$$
$$s_1 = m_0(x_1 - a) +... + m_{p-1}(b - x_{p-1})$$

ניקח נקודה חדשה $\forall x^* \in [x_k, x_{k+1}]$ בצורה כזאת שמקיים תת קטע $[a, b] < [x_k, x_{k+1}]$.

לכן לפי בחירת הנקודה x^* מתקיים:

$$a < x_1 < x_2 <... < \{x_k < x^* < x_{k+1}\} <... < x_{p-1} < b$$

$\{x_k < x^* < x_{k+1}\} \leftarrow$ נסמן בהתאמה את $M'_k,\ M''_k$ חסם עליון וחסם תחתון בהתאמה של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[x_k, x^*][x^*, x_{k+1}]$.

זאת אומרת,

$$inf\ m'_k \to [x_k, x^*] \qquad sup\ M'_k \to [x_k, x^*]$$

$$inf\ m''_k \to [x^*, x_{k+1}] \qquad sup\ M''_k \to [x^*, x_{k+1}]$$

ברור ש- $M'_k \leq M_k \ ,\ M''_k \leq M_k \ ,\ m''_k \geq m_k \ ,\ m'_k \geq m_k$.

נסמן בהתאמה סכומי דרבו S^*, s^* ונציג את הסכומים:

$$S^* = M_0(x_1 - a) + M_1(x_2 - x_1) +... + M'_k(x^* - x_k) + M''_k(x_{k+1} - x^*) +... + M_{p-1}(b - x_{p-1})$$
$$s^* = m_0(x_1 - a) + m_1(x_2 - x_1) +... + m'_k(x^* - x_k) + m''_k(x_{k+1} - x^*) +... + m_{p-1}(b - x_{p-1})$$

אם נחסר את $S_1 - S^*,\ s_1 - s^*$ נקבל:

$$S_1 - S^* = M_k(x_{k+1} - x_k) - M'_k(x^* - x_k) - M''_k(x_{k+1} - x^*)$$

$$s_1 - s^* = m_k(x_{k+1} - x_k) - m'_k(x^* - x_k) - m''_k(x_{k+1} - x^*)$$

נשתמש בזהות: $x_{k+1} - x_k = (x^* - x_k) + (x_{k+1} - x^*)$ ונקבל:

$$S_1 - S^* = (M_k - M'_k)(x^* - x_k) + (M_k - M''_k)(x_{k+1} - x^*)$$

$$s_1 - s^* = (m_k - m'_k)(x^* - x_k) + (m_k - m''_k)(x_{k+1} - x^*)$$

בהתחשב באי שוויונים שהצגנו בהוכחה וגם מאחר ש- $x^* - x_k > 0$ וגם $x_{k+1} - x^* > 0$

אזי נקבל: $0 \le s_1 - s^* \Leftarrow s_1 \le s^*$ וגם $0 \le S_1 - S^* \Leftarrow S^* \le S_1$.

∎

מסקנה של המשפט

לכל פונקציה חסומה $f(x)$ מתקיים אי השוויון: $\underline{I} \le \bar{I}$.

מבחנים של פונקציות אינטגרביליות

משפט

תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות של $y = f(x)$ בקטע $[a,b]$ אמ"מ $\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$

$(\lambda = \max_{0\le k\le n-1}(\Delta x_k)\,,\, \Delta x_k = x_{k+1} - x_k)$

הוכחה

$\Rightarrow$: נניח שהפונקציה אינטגרבילית, כלומר $\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I$ (I = אינטגרל).

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\eta > 0$ כך ש- $\eta > \lambda$ ומתקיים $|\sigma - I| < \varepsilon$ כלומר $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$

נחלק את הקטע $[a,b]$ לחלקים:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\lambda = \max_{0\le k\le n-1}(\Delta x_k)\,,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

נתבונן בסכום רימן למקרה שלנו $\forall C_k \in \Delta x_k$:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(C_k)\cdot\Delta x_k$$

נסמן $M_k = Sup[f(x)]$ כאשר $x \in \Delta x_k,\ x_k \le x \le x_{k+1}$

ומכאן נובע לפי בנית כל האמצעים הנ"ל בקטע $[a,b] \subset \Delta x_k \Leftarrow$ S-ש הוא סכום דרבו.

באופן אנלוגי (מקביל) נבנה סכום דרבו s קטן.

ומכאן נקבל:

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon$$

$$S - s \le 2\varepsilon$$

כלומר שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\eta > 0$ כך ש- $\eta < \lambda$ ומקיים $\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$.

⇐: נניח שמתקיים $\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$ אזי $\bar{I} \ge \underline{I}$

אבל לפי בניית s,S נוכל לכתוב ש: $s \le \underline{I} \le \bar{I} \le S$ ומכאן אפשר להציג $S - s \ge \bar{I} - \underline{I} \ge 0$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ' $\bar{I} - \underline{I} = 0$ נעביר אגף ונקבל $\bar{I} = \underline{I}$ מה שאומר שהיא אינטגרבילית.

נסמן ערך משותף I כי הרי הם שווים $I = \underline{I} = \bar{I}$ ואנו צריכים להוכיח את הגבול $\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I$.

כדי להוכיח ש-$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I$ בתנאי שלנו $s \le I \le S$ לכל חלוקה של בקטע $\varepsilon > 0$ קיים $\eta > 0$

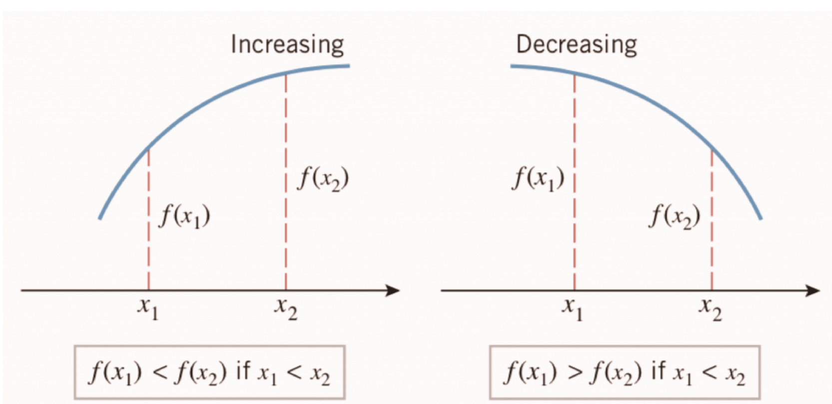
כאשר $\lambda <$ מתקיים $I - \varepsilon < s \le I \le S < I + \varepsilon$ ובהתחשב לכל חלוקה מתקיים:

$s \le \sigma \le S$

ולכן ניתן להציג $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$ ומכאן $\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I$.

∎

תזכורת להגדרת פונקציות מונוטוניות



משפט

כל פונקציה מונוטונית בקטע $[a, b]$ היא אינטגרבילית.

הוכחה

$f(x)$ מוגדרת וחסומה בקטע $[a, b]$ וערכיה נמצאים ב- $f(a)$, $f(b)$.

נחלק קטע $[a, b]$ לחלקים: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$.

בגלל ש-$f(x)$ פונקציה מונוטונית אז:

$$f(x_k) \le f(x) \le f(x_{k+1})$$

וכמובן ש-

$$S = \sum f(x_{k+1})\Delta x_k$$

$$s = \sum f(x_k)\Delta x_k$$

נחשב את ההפרש:

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]\Delta x_k$$

נסמן $\lambda = \max_{0\le k\le n-1} \Delta x_k$:

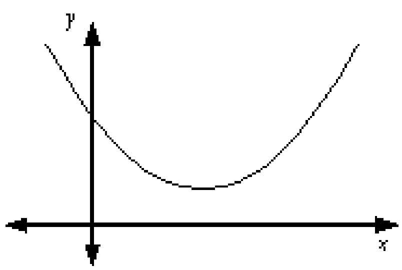
$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)](x_{k+1} - x_k)$$

$$S - s \le \lambda \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \lambda[f(b) - f(a)]$$

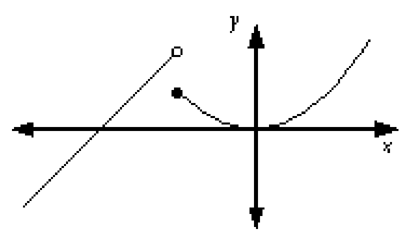
ומכאן מתקיים ש- $0 \le |S - s| \le \lambda[f(b) - f(a)]$, נציין ש-$\lambda$ שואפת לאפס,
ולפי כלל הסנדוויץ' נובע ש- $\lim_{\lambda\to 0} (S - s) = 0$ ולכן $f(x)$ אינטגרבילית.

תזכורת להגדרת פונקציות רציפות ואי-רציפות

Continuous Function



Discontinuous Function



משפט

כל פונקציה רציפה $f(x)$ בקטע-$[a, b]$ היא אינטגרבילית.

הוכחה

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ אז מכאן נובע שלכל $x \in [a, b]$ רציפה.

לפי תנאי הרציפות בקטע $[a, b]$ לכל $\varepsilon > 0$ נבחר $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ וקיים η כאשר-η $|x' - x''| <$

כך ש- $\frac{\varepsilon}{b-a}$ > $|f(x') - f(x'')|$.

נתבונן בחלוקה של הקטע $[a, b]$, ⇐ $\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$:

$$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < b = x_n$$

אזי $M_k - m_k \le \frac{\varepsilon}{b-a}$, נעשה הפרש ונקבל:

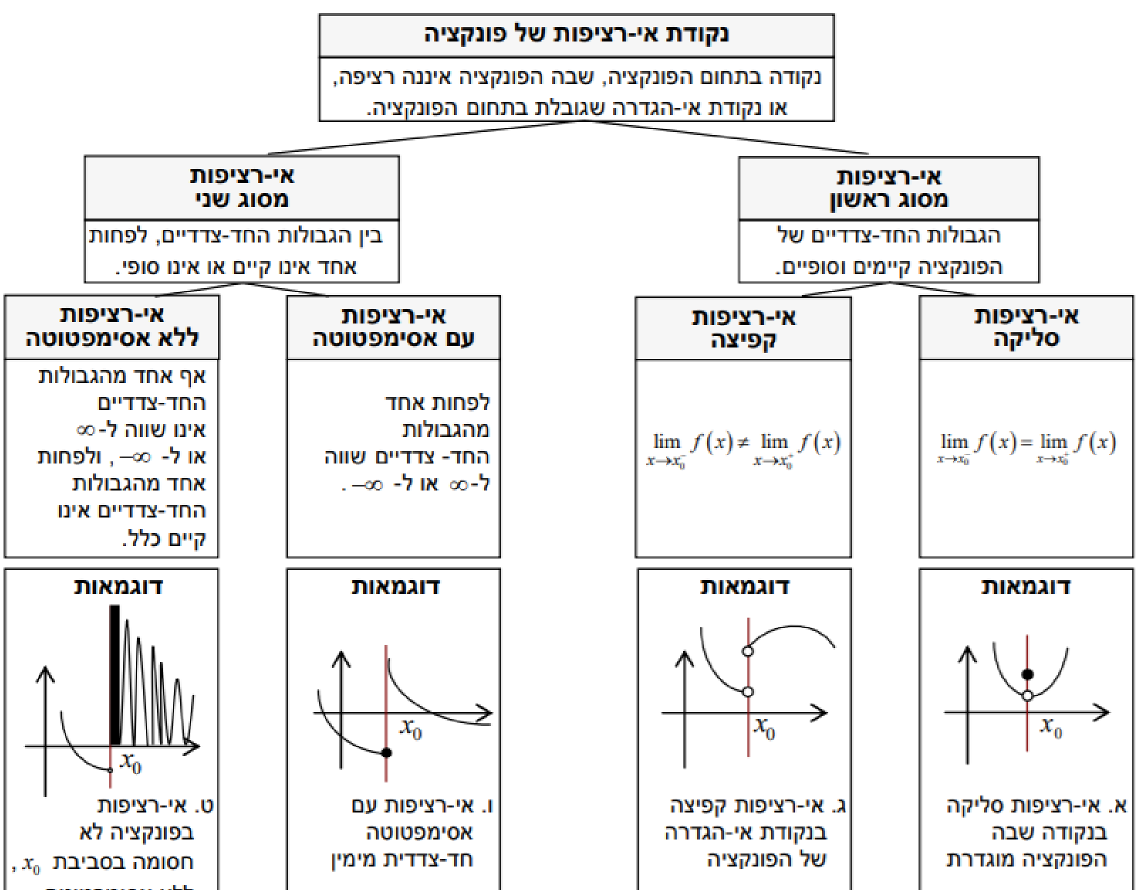
$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} [M_k - m_k]\Delta x_k.$$

מאחר ו- $\frac{\varepsilon}{b-a}$ מספר קבוע נוציא אותו מהסיגמה שלנו ונקבל:

$$S - s \le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon$$

$$S - s \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$$

ולכן $f(x)$ אינטגרבילית.



משפט

אם פונקציה $f(x)$ חסומה בקטע $[a, b]$ ורציפה למקוטעין (יש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות)

אזי הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית.

הוכחה

לפשטות, נניח שיש לה רק נקודת אי רציפות אחת, נסמן אותה ב-c ומתקיים $a < c < b$.

נבחר סביבת δ של c שיתקיים: $(c - \delta, c + \delta) \subset [a, b]$ ונסמן אותה ב-Δ.

נחלק את הקטע $[a, b]$ באיזשהו אופן כך שמתקיים אי-השוויון הבא:

$$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$$

נסמן $\lambda = \max_{0\le k\le n-1} (x_{k+1} - x_k)$ ונבנה סכום דרבו s,S.

נסמן M_k החסם העליון ו-m_k החסם התחתון , נציג את הפרש הסכום:

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} [M_k - m_k]\Delta x_k$$

נסמן בנוסף ונציג בחלקים את הפרש הסכומים $S - s = A + B + C + D$:

סכום האיברים בקטע $B = [c + \delta, b]$

סכום האיברים בקטע $A = [a, c - \delta]$

סכום איברים כולל הקצוות
$D = [c - \delta, c + \delta]$

סכום האיברים בקטע $C = (c - \delta, c + \delta)$

את $\mathrm{Inf}, \mathrm{Sup}$ הכללי בקטע $[a, b]$ נסמן ב-M,m (מותר לנו כי הפונקציה רציפה וחסומה).

$C < 2\delta(M - m)$ ← גובה הקטע M-m ואורך הקטע 2δ

$D < 2\lambda(M - m)$ ← גובה הקטע M-m ואורך הקטע 2λ

נציב במשוואת הפרש הסכומים שלנו ונקבל את אי השוויון הבא:

$$S - s < A + B + 2\delta(M - m) + 2\lambda(M - m)$$

נבחר $\delta < \frac{\varepsilon}{6(M-m)}$ ונציב: $S - s < A + B + \frac{\varepsilon}{3} + 2\lambda(M - m)$.

תזכורת: $f(x)$ רציפה ב-$[a, b]$ ולפי קנטור $f(x)$ רציפה ב-$[a, b]$ במידה שווה. ההגדרה של **רציפות במידה שווה** דומה במידה מטעה לזו של רציפות. ההבדל המהותי בין השתיים הוא שרציפות היא תכונה נקודתית (בכל נקודה, הפונקציה רציפה או שאינה רציפה, ואם היא רציפה בכל נקודה, אזי היא רציפה בכל הקטע), בעוד שלרציפות במידה שווה אין משמעות בנקודה אחת - זוהי תכונה של הפונקציה בכל הקטע.

נבחר $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ מכיוון שהיא רציפה במידה שווה ב-$[a, c - \delta]$ וב-$[c + \delta, b]$

אותה δ מתאימה ללא בחירת ε.

ניקח x', x'' ששייכים ל-$[a, c - \delta]$ או ל-$[c + \delta, b]$ כאשר $\eta_1 > 0$ ומתקיים:

$$|x' - x''| < \eta_1 \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

אנחנו צריכים להראות שהגבול $\lim_{\lambda \to 0} |S - s| = 0$.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים η כך ש- $\lambda < \eta$ ו-$|S - s| < \varepsilon$ לכן ניקח $\eta = min(\eta_1, \frac{\varepsilon}{6(M-m)})$

שיקיים את התכונות של η_1 וגם ש-$\delta < \eta$.

$$2\lambda(M - m) < 2\eta(M - m)$$

$$\frac{2\varepsilon(M-m)}{6(M-m)} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lambda < \eta < \eta_1$$

נציב ב-$|x' - x''| < \eta_1 \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ את הערכים הכי גדולים והכי קטנים (חסם עליון ותחתון) ונקבל:

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$A + B < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (c - \delta - a) \quad \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - c - \delta$$

אורך מלבן קצה ימני פחות קצה השמאלי

רוחב המלבן

אורך מלבן קצה ימני פחות קצה השמאלי של $[a, c - \delta]$

רוחב המלבן

של $[c + \delta, b]$

$$A + B < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b - a - 2\delta) < \frac{\varepsilon}{3}$$

כעת נציב בהפרשי הסכומים $S - s = A + B + C + D$ ונקבל:

$$S - s < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} |S - s| = 0$$

ולכן הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית.

▌

תכונות של אינטגרלים מסוימים

$$I = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x)\Delta x_k,\ \lambda = \max_{0\le k\le n-1} \lambda\Delta x_k$$

משפט

יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ - אזי: $f(x) \pm g(x)$ גם אינטגרבילית ב-$[a, b]$.

הוכחה

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx =$$

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}[f(c_k) \pm g(c_k)]\Delta x_k =$$
$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}g(c_k)\Delta x_k =$$
$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

▌

משפט

לכל c קבוע אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ אז גם $c \cdot f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

הוכחה

ידוע ש-$f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ לכן נבדוק

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx =$$
$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}c \cdot f(c_k)\Delta x_k =$$
$$c \cdot \lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)\Delta x_k =$$
$$c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

▌

משפט

$f(x), g(x)$ הן אינטגרביליות $[a, b]$ אז $g \cdot f$ גם אינטגרביליות ב-$[a, b]$.

הוכחה

$f(x)$ ו-$g(x)$ הן חסומות בקטע $[a, b]$זאת אומרת שקיימים M,N>0 וניקח חלוקה לכל קטע $[a, b]$ $\Delta x'_k, \Delta x''_k$ ומתקיימים ש- $|f(x)| \leq N$וגם $|g(x)| \leq M$ אזי:

$$|f(x')g(x') - f(x)g(x)| = |f(x')g(x') - f(x')g(x) + g(x)f(x') - f(x)g(x)|$$

ולפי אי שוויון המשולש נקבל:

$$|f(x)[g(x') - g(x)] + g(x)[f(x') - f(x)]| \le |f(x)||g(x') - g(x)| + |g(x)||f(x') - f(x)| \le M\omega'' + N\omega'$$

($|g(x') - g(x)|$ זה תנודה של ω'' וגם $|f(x') - f(x)|$ זה תנודה של ω')

$$|f(x')g(x') - f(x)g(x)| \le M\omega'' + N\omega'$$

כלומר קיבלנו שלכל $(x, x') \in \Delta x_k$ מתקיים:

$$|f(x')g(x') - f(x)g(x)| \le M\omega_k'' + N\omega_k'$$

לכן $\omega_k \le M\omega_k'' - N\omega_k'$ ונכפיל שני אגפים ונסכום:

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta_k \le \sum_{k=0}^{n-1} |M\omega'' + N\omega'|\Delta x_k$$

ידוע לנו ש-f ו-g אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ונעבור לגבול $\lambda \to 0$ ונקבל:

$$\lim_{\lambda\to 0} \left(M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k'' \cdot \Delta x_k + N \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k' \cdot \Delta x_k\right) = M \cdot \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k''\Delta x_k + N \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k'\Delta x_k$$

$$0 \le M \cdot \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k''\Delta x_k + N \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k'\Delta x_k = 0$$

ומכאן לסיכום קיבלנו ש-

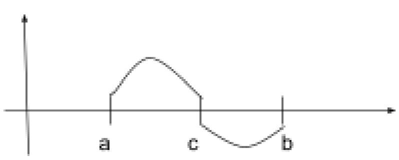
$$0 < |f(x')g(x') - f(x)g(x)| < 0$$

זאת אומרת שגם מכפלת הפונקציות היא אינטגרבילית.

∎

משפט אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, c][c, b]$ אז $f(x)$ אינטגרבילית לכל $[a, b]$.

הוכחה



$f(x)$ היא אינטגרבילית ב- $[a, c]$ אזי:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c'_k)\Delta x_k\,,\ \lambda = \max\ \Delta x_k \to [a, c]$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k'')\Delta x_k\,,\ \lambda = max(\lambda', \lambda'')$$

$$\lim_{\lambda'\to 0} \sum f(c_k')\Delta x_k + \lim_{\lambda''\to 0} \sum f(c_k'')\Delta x_k$$

∎

הכללה של המשפט האחרון

$$[a, b] = [a, x_1][x_1, x_2].....[x_{n-1}, b]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^b f(x)dx$$

משפט

$g(x)$ ו-$f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א	אם $f(x) \geq m$ לכל $x \in [a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$
ב	אם $f(x) \leq M$ לכל $x \in [a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
ג	אם $f(x) \geq g(x)$ לכל $x \in [a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

כל שלושת המשפטים האלה ההוכחה שלהם מתבססת לפי רימן.

הוכחה א'

נתבונן בחלוקת הקטע $[a,b]$ ובניית σ.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} m\Delta x_k = m\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = m(b-a)$$

∎

הוכחה ב'

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M\Delta x_k = M\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M(b-a)$$

∎

הוכחה ג'

ידוע לנו ש-$f(x) \geq g(x)$ אזי $f(x) - g(x) \geq 0$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$$

נשתמש במשפט ידוע ולכן, $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$

ומכאן נובע ש- $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

∎

מסקנה

אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ והערך של פונקציה $f(x)$ נמצא בין $m \leq f(x) \leq M$

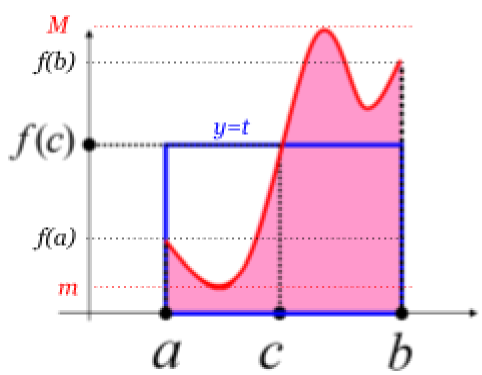
אז, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

משפט (ערך הביניים האינטגרלי)

אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ אז קיים $c \in [a,b]$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

הוכחה

איור עזר



$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \backslash :(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

מכיוון שכל פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$

אזי לפי משפט ערך הביניים של קושי,

קיים $c \in [a,b]$ כך ש- $f(c) = t$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

∎

משפט

אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי גם $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

הוכחה

אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ניקח חלוקה של קטע $[a,b]$ בשתי נקודות $(x,x') \in \Delta x$

$$||f(x)| - |f(x')|| \le |f(x) - f(x')| < \omega$$

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

נבצע אינטגרציה משמאל לימין ונקבל:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

ולכן,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

∎

תעריכו את האינטגרל $\int_{10}^{18} \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}}$

אם $x \geq 10$, $|\cos x| \leq 1$.

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}\right| < 8 \cdot 10^{-2}$$

$$I = \left|\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}} dx\right| < \frac{8}{10^2} < \frac{1}{10}$$

תעריכו את האינטגרל $I = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$ $(0 \leq \cos^2 x \leq 1)$

$$\frac{1}{8} < \left|\frac{1}{5+3cos^2 x}\right| < \frac{1}{5}$$

$$\frac{\Pi}{16} \leq I \leq \frac{\Pi}{10}$$

תנו ערך של $\int_0^2 e^{x^2} dx$

$$1 \leq e^{x^2} \leq e^4$$

מאחר והחסם העליון שלנו הוא 2 נכפיל אותו באי השיוויון ונקבל:

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4$$

תרגילי בית

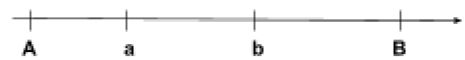
- תעריכו את האינטגרל $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$ I $(0 < I < \frac{4}{27})$
- תעריכו את האינטגרל $I = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} e^{\sin x} dx$ $(\frac{\Pi}{2} < I < \frac{e^{\Pi}}{2})$

• תעריכו את האינטגרל $(0 < I < 1)I = \int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} \frac{\sin x}{x}dx$

משפט-ניוטון-לייבניץ

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, F היא פונקציה קדומה של $f(x)$

אינטגרל עם גבול עליון משתנה



$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt\,,\ \Phi(a) = 0,\ (a,b) \subset [A,B]$$

הגדרת פונקציה רציפה בצורה הפורמלית היא $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ וצריך להתקיים:

א. $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0.

ב. קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$

ג. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

או שאפשר גם להגדיר באופן הבא: נסמן $\Delta x = x - x_0 = h$ ונקבל $x = x_0 + h$

כך שמתקיים $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

משפט

פונקציה $\Phi(x)$היא רציפה בקטע $[A,B]$.

הוכחה

ניקח נקודה $x_0 \in [a,b]$ונוכחש $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$.

נשתמש: $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ (זה נובע בגלל ש- $\int_a^{x_0+h} = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+h}$)

נשתמש בתכונה של ערך מוחלט באינטגרלים,

נעריך את $\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|dt\right|$ ונחליף $|f(t)| = M$

(אנחנו במשפחת אינטגרלי רימן בפונקציות רציפות, התכונה הכי חשובה היא שמדובר כאן בפונקציות חסומות מלעיל ומלרע, ולכן מותר לנו להחליף).

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|dt\right| \leq M \cdot \left|\int_{x_0}^{x_0+h} dt\right| = M|h|$$

$$\left|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)\right| \leq M|h|$$

ומכאן נובע,

$$\lim_{h\to 0} [\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0)$$

ולכן $\Phi(x)$היא רציפה בקטע $[A, B]$.

∎

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[A, B]$ולכל נקודה $c \in [A, B]$ מתקיים $F(x) = \int_c^x f(t)dt$

אזי ל-$f(x)$ יש פונקציה קדומה, כלומר $F'(x) = f(x)$.

הוכחה

צריך להוכיח $F'(x) = f(x)$.

לפי ההגדרה של נגזרת עבור $F(x)$והערכה של אינטגרל מתקיים,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt =$$

$$= [\int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt] - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

לכן,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

לפי משפט ערך-הביניים, לכל פונקציה רציפה בקטע $[A, B]$ קיים $c \in [x, x + \Delta x]$ כך שמתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

ולכן נרשום כך:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c) \cdot (x + \Delta x - x) = f(c) \cdot (\Delta x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(c) \cdot (\Delta x)$$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

(הפעולה שאנו צריכים לעשות כדי להוכיח ש- $f = F'$ היא לחלק ב-Δx כמו הגדרת הנגזרת וכדי להוכיח שזה נגזרת נראה גבול $\Delta x \to 0$)

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$

∎

משפט (המשפט היסודי של אינפי - משפט ניוטון לייבניץ)

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[A, B]$ ו-$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$,

אזי מתקיים $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

הוכחה

לפי משפט שהוכחנו שפונקציה $\Phi(x)$ היא רציפה בקטע $[A, B]$

ולפי משפט שהוכחנו ש-$F'(x) = f(x)$.

יהא $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ פונקציה קדומה של $f(x)$ (אנו כותבים G במקום F כדי להבדיל בין F נגזרת).

קיים c כך שמתקיים $F(x) = G(x) + c$ ולפי זהות:

$$F(b) - F(a) = [G(b) + c] - [G(a) + c] = G(b) - G(a)$$

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt$$

ולכן,

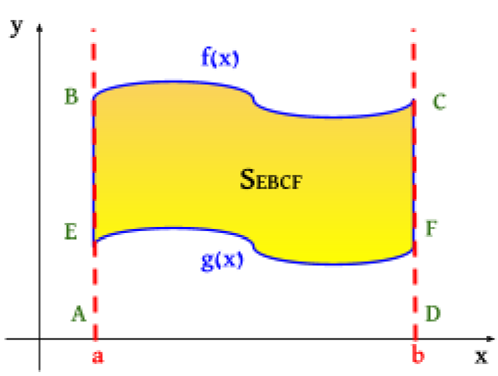
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

∎

מסקנה

מבחינה גיאומטרית, האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מייצג שטח החסום ע"י פונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

מציאת שטחים בעזרת אינטגרלים מסוימים



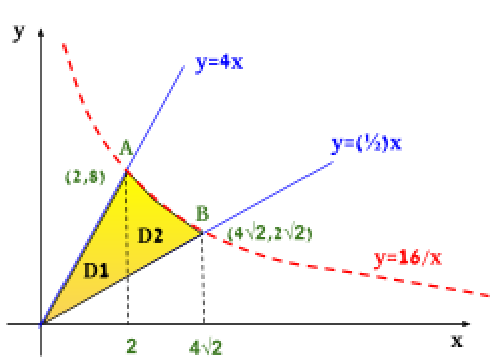
נתון טרפז החסום על-ידי הפונקציות $f(x),\ g(x)$.
וגם $f(x) > g(x) > 0$ $x \in [a,b]$.

$$S_{EBCF} = S_{ABCD} - S_{AEFD}$$

בצורה אינטגרלית ניתן לכתוב כך:

$$S_{EBCF} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

- נתון גרף ונתונות $y = \frac{16}{x}$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 4x$, מצאו את שטח $D = D_1 + D_2$.



הנקודה A:

$$4x = \frac{16}{x} \Rightarrow x^2 = 4/\sqrt{\ } \Rightarrow x = \pm\ 2$$

$$y = 4 \cdot 2 = 8$$

$$A = (2,8)$$

הנקודה B:

$$\frac{1}{2}x = \frac{16}{x} / \cdot 2x \Rightarrow x^2 = 32/\sqrt{\ } \Rightarrow x = \pm\ 4\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$B = (4\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

השטח D1:

$$D_1 = S_1 = \int_0^2 [4x - \frac{1}{2}x]dx = \int_0^2 \frac{7}{2}xdx = \frac{7}{4}x^2|_0^2 = \frac{7}{4} \cdot 2^2 - \frac{7}{4} \cdot 0 = 7$$

השטח D2:

$$D_2 = S_2 = \int_2^{4\sqrt{2}} [\frac{16}{x} - \frac{1}{2}x]dx = 16\int_2^{4\sqrt{2}} \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_2^{4\sqrt{2}} xdx = 16lnx|_2^{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}|_2^{4\sqrt{2}} =$$
$$= [\,16ln(4\sqrt{2}) - 16ln(2)\,] - [\frac{1}{4}(4\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}2^2] = 16[ln(4\sqrt{2}) - ln(2)] - 7 =$$

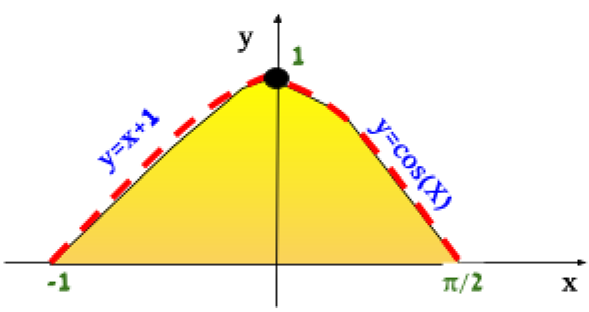
השטח $D = D_1 + D_2$:

$$D = D_1 + D_2 = S_1 + S_2 = 7 + 16[\,ln(4\sqrt{2}) - ln(2)\,] - 7 = 16 \cdot [ln(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) - ln(2)] =$$

$$= 16 \cdot [ln(2^{2.5}) - ln(2)] = 16 \cdot [2.5 \cdot ln(2) - ln(2)] = 16 \cdot [1.5 \cdot ln(2)] = 24 \cdot ln(2)$$

ולכן $D = 24 \cdot ln(2)$.

- נתון גרף ונתונות $y = x + 1$ כאשר $-1 \le x \le 0$ וגם $y = \cos x$ כאשר $0 \le x \le \frac{\Pi}{2}$.
מצאו שטח S.



$$S = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{\frac{\Pi}{2}} = \int_{-1}^{0}(x + 1)dx + \int_{0}^{\frac{\Pi}{2}} \cos x\, dx = \frac{3}{2}$$

שינוי משתנים באינטגרלים מסוימים

נסתכל לדוגמה על האינטגרל הבא: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} \cdot dx$

נסמן $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

קיבלנו פתרון שמאוד מזכיר את נוסחת המעגל: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

בהצבה כללית למשוואת המעגל נבצע: $x = R \cdot cos(t),\ y = R \cdot \sin(t),\ x^2 + y^2 = R^2$

שנסתכל על הפונקציה שלנו מיד אפשר לראות כי מדובר במעגל, הטרנספורמציה / שינוי המשתנים ניתן לסמן אותו בהצבה $x = 2 \cdot \sin(t)$.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} \cdot dx = \int_{-} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot dx$$

$$dx = 2 \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\int \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2 \cdot \cos t \cdot dt$$

נשים לב כי הגבולות לא נכתבו לאחר ההצבה שלנו וזאת מאחר כי הם כבר לא הגבולות שלנו יותר,
בכל פעולת הצבה עבור אינטגרל מסוים יש לנו לשנות את הגבולות בהתאם להצבה.
כדי לגלות שינוי של t חייבים להציב את ערכי ה-x שלנו בתוך ההצבה
$x = 2 \cdot \sin(t)$
לכן נכתוב טבלה ונחשב:

x	t
$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} = 2\sin t \Rightarrow$ $sin(t) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$ $\Rightarrow t = arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow t = -\frac{\Pi}{3}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} = 2\sin t \Rightarrow sin(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$ $\Rightarrow t = arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow t = \frac{\Pi}{3}$
$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \leftrightarrow [-\frac{\Pi}{3}, \frac{\Pi}{3}]$	

בינתיים עשינו העברה $f(x) \rightarrow \phi(t)$ עכשיו נתחיל לחשב את האינטגרל שלנו:

$$= \int_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} 2 \cdot \cos t \cdot 2 \cdot \cos t \cdot dt = 4 \cdot \int_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} \cos^2 t \cdot dt = 4 \cdot \int_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot dt = 2 \cdot \int_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} (1 + \cos 2t) \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \int_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} 1 \cdot dt + 2 \cdot \int_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} \cos 2t \cdot dt = 2t\Big|_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} + 2(\frac{\sin(2t)}{2})\Big|_{-\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{3}} = \frac{4\Pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$S = \frac{4\Pi}{3} + \sqrt{3}$$

אינטגרלים בחלקים עם גבולות

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

אינטגרלים לא אמיתיים

בחשבון אינפיניטסימלי, אינטגרל לא אמיתי (או אינטגרל מוכלל) מהווה הכללה מתמטית של האינטגרל המסוים לקטעים לא סופיים ולפונקציות בלתי-חסומות בקטעים פתוחים או חצי פתוחים. באופן אינטואיטיבי, ברור ששטח של פונקציה לא חסומה או של פונקציה בקטע אינסופי, הוא שטח שמכסה קבוצה לא חסומה ולכן ברור שלא מדובר בשטח המוכר לנו מחיי היומיום, אלא בגבול שמוגדר להיות השטח. אם הגבול הנ"ל קיים, האינטגרל מתכנס. אחרת, האינטגרל מתבדר.
האינטגרלים הבאים נקראים לא אמיתיים: $\int_{-\infty}^{+\infty}$, $\int_a^{+\infty}$, $\int_{-\infty}^{b}$ וגם $\int_a^b f(x)dx$ כאשר $f(x)$ לא חסומה.

הגדרות חשובות לאינטגרלים לא אמיתיים

1. אם קיים גבול $b \to \infty$ אזי אומרים שאינטגרל $\int_a^b f(x) \cdot dx$ $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^{+\infty} f(x) \cdot dx$ מתכנס.
2. אם קיים גבול $a \to -\infty$ אזי אומרים שאינטגרל $\int_a^b f(x) \cdot dx$ $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^b f(x) \cdot dx$ מתכנס.
3. אם קיים גבול $b \to \infty$, $a \to -\infty$ אזי אומרים שאינטגרל $\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx$ הוא אינטגרל מתכנס.
4. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודה אי-רציפה (∞) בנקודה $c \in [a, b]$ ורציפה בקטעים: $a \le x < c$, $c < x \le b$.

אנו מבינים ש- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx$

אינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ לא אמיתי מסוג (2) כאשר פונקציה f לא רציפה קוראים מתכנס, אם קיים שני אינטגרלים, זאת אומרת שפונקציה f בנקודה c לא חסומה $f(c) = \infty$.

סוג I - $\int_{-\infty}^{b}$, $\int_{a}^{-\infty}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}$

סוג II - $\int_a^b f(x)dx$, $a < c < b$

$$\int_0^\infty \cos x\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\, dx = \lim_{b\to\infty} [\sin x]_0^b = \lim_{b\to\infty} [\sin b - \sin 0] = \infty$$

האינטגרל מתבדר (לא קיים).

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} [-\frac{1}{x}]_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty} [1 + \frac{1}{a}] = 1$$

האינטגרל מתכנס (קיים).

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to0} [ln(x)]_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to0} [ln(1) - ln(0)] = 0 - (-\infty) = \infty$$

האינטגרל מתבדר.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\alpha\to0} \int_{1+\alpha}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\alpha\to0} [2\sqrt{x-1}]_{1+\alpha}^2 = \lim_{\alpha\to0} [2\sqrt{1} - 2\sqrt{1-(1+x)}] = 2$$

האינטגרל מתכנס (קיים).

$\int_0^{\infty} e^{-3x}dx = \frac{1}{3}$ בבית.

אינטגרל חשוב

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_a^{+\infty} x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} [\frac{x^{-p+1}}{-p+1}]_a^b = \lim_{b\to-\infty} [\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}]$$

אם $1 < p$ אזי הביטוי $\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = 0$

אם $1 > p$ אזי הביטוי ∞

מסקנה

אם $1 < p$ אזי האינטגרל מתכנס

אם $1 \geq p$ אזי האינטגרל מתבדר

אינטגרל חשוב

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to0} [\int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-p}dx] = \frac{-1}{1-p} \lim_{\varepsilon\to0} [(b-x)^{1-p}]_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon\to0} [\varepsilon^{1-p}] + \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon\to0} (b-a)^{p-1}$$

אם $1 > p$ אזי $\lim_{\varepsilon\to0} [\varepsilon^{1-p}] = 0$

אם $1 \leq p$ $\lim_{\varepsilon\to0} [\varepsilon^{1-p}] = \infty$

מסקנה

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

כאשר $1 > p$ אזי האינטגרל מתכנס

כאשר $1 \leq p$ אזי האינטגרל מתבדר

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}}dx = \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$$

$$p = \frac{1}{3} < 1$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

$$\frac{1}{ln(x)} \sim \frac{1}{x-1}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\frac{1}{ln(x)})}{(\frac{1}{1-x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\frac{1}{x})}$$

p =1

ולכן האינטגרל מתבדר.

נבדוק התכנסות של האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}dx$

אפשר להעריך פונקציה זו לפי צורה $\frac{M}{x^p}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} < \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

מאחר ו-$1 < \frac{5}{3} = p$ אזי האינטגרל מתכנס.

משפט

אם $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור $[a, b]$ כאשר $b > a$.

a היא נקודה קבועה ויהיו $0 < M$ ו-p שני מספרים אזי:

אם $p > 1$ ו-$f(x) \le \frac{M}{x^p}$ כאשר $0 \le$ $x \in [a, +\infty)$ אזי $\int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$ מתכנס.

אם $p \le 1$ ו-$f(x) \ge \frac{M}{x^p}$ לכל $x \in [a, \infty)$ אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר.

הגדרה של התכנסות בהחלט

נתונה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע סגור $[a, b]$ כאשר $b > a$ ו- a הוא קבוע.

נאמר שפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a, -\infty)$

אם אינטגרל לא אמיתי $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס אזי $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתכנס בהחלט.

לפי תכונה של אינטגרלים:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin x\, dx$ לפי תכונה:

$$\left|e^{-x} \cdot \sin x\right| \le e^{-x}$$

לפי המשפט האחרון, מספיק לבדוק את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} [-e^{-b} + e^{0}] = 1$$

האינטגרל המקורי מתכנס בהחלט.

משפט (קריטריון קושי להתכנסות של אינטגרל לא אמיתי)

פונקציה $f(x)$ מוגדרת ואינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס

אם ורק אם לכל $0 > \varepsilon$ קיים b_0 כזה ש-$b_0 > b_1 \cdot b_2$ ומתקיים $\varepsilon > \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|$.

מבחני השוואה להתכנסות של אינטגרלים לא אמיתיים

מבחן I

נתונות שתי פונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ לא שליליות בקטע $[a,\infty)$

ואינטגרבילית בקטע סגור $[a,b]$ עבור $b > a$.

נניח שקיים מספר ממשי כזה ש b_0 וקיים $x \ge$ $f(x) \le g(x)$ אזי ניתן להסיק:

1. אם אינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס
2. אם אינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתבדר אזי $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

הוכחה מבחן I

נסמן $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ ו-$\Psi(b) = \int_a^b g(x)dx$ ומתקיים $\Phi(b) \le \Psi(b)$.

אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אזי $\Psi(b)$ חסומה בקטע (a,∞) ולכן מכאן נובע שגם $\Phi(b)$ חסומה בקטע זה.

מכאן $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

▌

מבחן II

נתונות שתי פונקציות $f(x), g(x)$ לא שליליות בקטע $[a, \infty)$.

נניח שקיים הגבול $L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ אזי $\int_a^\infty g(x)dx \sim \int_a^\infty f(x)dx$ שקולים, מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

- ההשוואה צריכה להיות עם אינטגרל מוכר וחייבים להכיר את התנהגות האינטגרל.

הוכחה מבחן II

ניקח $0 < \varepsilon$ כך ש-$0 < L - \varepsilon$ לפי הגדרה של גבול אינסופי קיים $b > a$ כך שלכל $x > b$ מתקיים $L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$ נעשה מכנה משותף ונקבל $g(x)(L - \varepsilon) \le f(x) \le (L + \varepsilon)g(x)$.

לפי מבחן ההשוואה I קיבלנו את מה שרצינו להוכיח.

▌

אינטגרל פרנל

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

נעשה שינוי משתנים $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dt}{2x} = x = \sqrt{t} \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow dx$

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$$

$$[0, \infty) = [0, \frac{\pi}{2}] + [\frac{\pi}{2}, \infty)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t}\cdot\sin(t)}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{t}} = 0$$

לפי חישוב הגבול, האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ אמיתי.

לכן נחקור רק את האינטגרל הימיני (הלא אמיתי) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$:

נעשה אינטגרציה בחלקים: $dv = \sin(t)dt \Rightarrow v = -\cos(t)$, $u = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow du = -\frac{\sqrt{t}}{2}dt$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt = -\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos(t)dt}{\sqrt{t^3}}$$

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t^3}} \le \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

מאחר ו-$p = \frac{3}{2} > 1$

לכן האינטגרל $\int_{0}^{\infty}\sin(x^2)dx$ מתכנס.

סדרות וטורי פונקציות

השאלה העיקרית שתעסיק אותנו היא אילו תכונות של פונקציות נשמרות תחת גבול,

כלומר: אם סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לפונקציה f אילו מהתכונות של f_n מועברות ל-f?

הגדרה

אנו אומרים שסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת בנקודה x_0 ומתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x_0)$

לדוגמה $\lim_{n\to\infty}\{(1+\frac{x_0}{n})^n\} = e^{x_0}$

סדרה של התכנסות במידה שווה של פונקציה

אנו אומרים שסדרה של $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה אם לכל $0 < \epsilon$ קיים $N(\epsilon)$ (ולא ב-x)

כך ש-$N(\epsilon) < n$ מתקיים $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \epsilon$.

דוגמה

האם סדרת הפונקציות $\frac{1}{2} \le x \le 1$, $f_n(x) = \{\frac{n\cdot x}{1+n^2\cdot x^2}\}$ רציפה במידה שווה?

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{nx}{1+n^2\cdot x^2} < \frac{1}{n\cdot x} < \frac{2}{n} < \epsilon$$

$N = \frac{2}{\epsilon}$ לכל $0 < \epsilon$ בקטע $[\frac{1}{2}, 1]$ במידה שווה ← סדרה מתכנסת.

מבוא

יהא טור של פונקציות: $f_1(x), f_2(x),...., f_n(x),....$.

נרכיב את סכום הסדרה של הפונקציות ונקבל: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) +.... + f_n(x) +...$

כאשר $x = x_0$ אנו נקבל טור מספרים: $f_1(x_0) + f_2(x_0) +... + f_n(x_0) +..$.

אם $a < x < b$ אזי הטור מתכנס בקטע (a, b)

טענה

טור פונקציונאלי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בקטע $[a, b]$ פירושו שלכל $x \in [a, b]$ הטור מתכנס.

טור חזקות

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ נקרא טור חזקות שמרכזו ב-$x = x_0$, טור זה הוא מקרה פרטי של טור פונקציות.

טור זה מגדיר פונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ אשר מוגדרת עבור כל ערך של x שעבורו הטור מתכנס.

עבור כל ערך של x שנציב בטור החזקות מתקבל טור מספרים.

במידה שטור זה מתכנס, ערך הפונקציה מוגדר כסכום הטור.

קבוצת ערכי ה-x עבורם הטור מתכנס תקרא תחום ההתכנסות של הטור.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 +.... + a_n(x - x_0)^n +....$$

$a_0, a_1, a_2,..., a_n,...$ הם סדרת מקדמי טור מספרים כאשר a_n הוא האיבר הכללי של המקדמים.

$a_n(x - x_0)^n$ הוא האיבר הכללי של הטור.

הערה

אם ידוע לנו המקדמים של טור מספרים $a_0, a_1, a_2,....$ אזי אומרים שהטור ידוע (נתון).

הגדרה

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מפותח בסביבת x_0.

הגדרה

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מפותח לפי טור חזקות שבבסיסו $(x-x_0)$.

- מקרה פרטי של טור חזקות: $\sum a_n \cdot x^n$ כאשר $x_0=0$.

הכל מבוסס על מציאת האיבר הכללי $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$.

נסתכל למשל על טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} 2(x-1)^n$ שמרכזו ב-$x=1$. עבור כל ערך של x, טור זה הינו טור הנדסי/גיאומטרי בעל מנה $q=x-1$, לפיכך טור זה מתכנס אם"ם $-1<x-1<1$ תחום ההתכנסות של טור זה היינו הקטע הפתוח $(0,2)$ כלומר $0<x<2$.

בנוסף, עבור כל x בתחום זה מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot(x-1)^n=\frac{2}{2-x}$.

אם למשל נציב בטור זה $x=1\frac{1}{2}$ נקבל את הטור ההנדסי: $\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ שסכומו $4=\frac{2}{1-1\frac{1}{2}}$.

משפט אבל

תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא קטע שמרכזו בנקודה-$x=x_0$

ייתכן מאוד גם שהקטע הוא $(-\infty,\infty)$, כלומר כל הציר הממשי.

קיים מספר ממשי $R\geq 0$, שיקרא רדיוס ההתכנסות של הטור.

תחום התכנסות של טור חזקות $\left|x-x_0\right|<R$ כאשר R הוא רדיוס ההתכנסות.

$$-R<\left|x-x_0\right|<R$$

הגדרה

הרדיוס R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור, כאשר בתוך הרדיוס הטור מתכנס ומבחוץ הוא מתבדר.

על מנת למצוא את רדיוס R ישנן שתי נוסחאות:

1. **קושי אדמר:** $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}}$
2. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

משפט

יהי טור חזקות עם R רדיוס:

1. תחום ההתכנסות

אם רדיוס ההתכנסות $R = \infty$ הטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

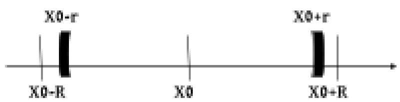
אם רדיוס ההתכנסות $R = 0$ עבור $x = x_0$ בלבד.

אם רדיוס ההתכנסות $0 < R < \infty$ לכל $x_0 - R < x < x_0 + R$ הטור מתכנס בהחלט,

אחרת, הטור מתבדר. בקצוות $x = x_0 \pm R$ צריך לבדוק כל מקרה לגופו.

2. לכל $0 < r < R$

הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[x_0 - r, x_0 + r]$



דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (x-2)^n = (x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \ldots$$

לפי נוסחה 2 (דלמבר): $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ נמצא את הרדיוס R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1, \ |x-2| < 1, \ x_0 = 2, \ -1 < x - 2 < 1 \,/+2 \to 1 < x < 3$$

לפי משפט אבל, איננו יודעים מה קורה בקצוות 1,3 ולכן זה דורש ממנו חקירה נוספת,

נציב את ערכי הקצוות בפונקציה נחקור את הטור ונבחן את ההתכנסות שלו עבור כל ערך:

- ב-x=1 הטור הינו: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots$.

זהו טור בעל סימנים מתחלפים אשר מתכנס על פי מבחן לייבניץ.

- ב-x=3 הטור הינו: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ ולפי $\frac{1}{n^p}$, $p = 2 > 1$ הטור מתכנס.

לכן לפי בדיקת התכנסות הטור בקצוות הטור מתכנס לכל $1 \le x \le 3$.

טור טיילור ומקלורן

טיילור-מקלורן נתנו טכניקה איך למצוא את ה-a_n לכל טור.

משפט

נניח שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$ והיא גזירה עד אינסוף,

אזי לכל $n > 0$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right| \le k$ לכל 2 נקודות $(x, x_0) \in [A,B]$

וכאשר (n) זה מספר ה-n פעמים של גזירות הפונקציה.

אזי מתקיים **טור טיילור**, זאת אומרת שאפשר לפתח את הפונקציה $f(x)$ לפי טיילור.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots.$$

$a_0, a_1, a_2..... = f(x_0), \frac{f'(x_0)}{1!}, \frac{f''(x_0)}{2!},...$ הם מקדמי טיילור.

מקלורן נתן מקרה פרטי של טיילור כאשר $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot(x)^1 + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x)^2 + ...$$ מקלורן -

- טור מקלורן הוא טור נוח לחישוב ערכים של פונקציות בנקודה 0.

פיתוח פונקציות אלמנטריות

לפי מקלורן $f(x) = e^x; x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x$$
$$a_0 = f(0) = 1$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!}$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

לפי מקלורן $f(x) = \sin x; x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

בגלל ש-$\sin x$ אי-זוגי בטור יהיה רק איברים אי-זוגיים

$$f(x) = \sin x$$
$$a_0 = f(0) = 0$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 0$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3!}$$

לפי מקלורן $f(x) = \cos x; x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

בגלל ש-$\cos x$ זוגי בטור יהיה רק איברים זוגיים

$$f(x) = \cos x$$
$$a_0 = f(0) = 1$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 0$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2!}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 0$$

לפי מקלורן $f(x) = \ln(1+x)\ ;x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$f(x) = \ln(1+x)$$
$$a_0 = f(0) = 0$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2!}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 0$$

לפי מקלורן $f(x) = \frac{1}{1+x}\ ;x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{-3\cdot 2\cdot x^3}{3!} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot x^4}{4!}....$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - .... + x^n + ... =$$

קיבלנו טור עם סימנים מתחלפים:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^5}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1+x)^6}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$a_0 = f(0) = 1$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = -\frac{x}{1!}$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2x^2}{2!}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-3\cdot 2\cdot x^3}{3!}$$

לפי מקלורן $f(x) = \frac{1}{1-x}\ ;x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3\cdot 2\cdot x^3}{3!} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot x^4}{4!} + ...$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... =$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1-x)^5}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$a_0 = f(0) = 1$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{x}{1!}$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2x^2}{2!}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{3\cdot 2\cdot x^3}{3!}$$

פיתוח פונקציות לא אלמנטריות

במקרים רבים לא קל למצוא את המקדמים של טיילור בדרך המקובלת בגלל שהנגזרת מסובכת,
לכן נעזר בשיטות אלגבריות וננסה לדמות את הפונקציה הנתונה שלנו לפיתוח סטנדרטי של
פונקציות אלמנטריות המוכרות לנו כמו למשל: $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\cos(x)$, e^x, $\sin(x)$

$f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} =$

$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3} =$

$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}$

נשים לב כי הפונקציה $\frac{1}{1-x}$ מוכרת לנו,
בנוסף הפונקציה $\frac{1}{x+3}$ דומה לפונקציה $\frac{1}{1+x}$
לכן נסדר אותה בעזרת שיטות אלגבריות,
נחלק ב-3 את הפונקציה ונקבל:

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}} \sim \frac{1}{1+x}$

קיבלנו $f(x) = \frac{1}{4}[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{1-x}] =$

$= \frac{1}{4}[-\frac{1}{3}(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + ...) - (1$

$\Leftarrow \frac{1}{x^2+2x-3} = -\frac{1}{4}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(-\frac{x}{3})^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n]$

⇐אנחנו לא חישבנו בעזרת מקדמים!
כדי למצוא רדיוס התכנסות של הטור R בלי
להשתמש בנוסחת קושי-אדמר יש שיטה שיכולה
לחסוך לנו הרבה זמן במציאת ה-R, נתבונן:

$f(x) = \frac{1}{4}[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{1-x}]$

עבור הטור $\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$ הוא סכום של טור הנדסי,

$q = |\frac{x}{3}| < 1 \backslash \cdot 3$

$|x| < 3$

עבור הטור $\frac{1}{1-x}$ הוא מתכנס כאשר $|x| < 1$

יש לנו שתי תחומים $|x| < 3 \ \wedge\ |x| < 1$
נבחר תחום שיהיה חוקי בעבור שני הטורים
וזה התחום $|x| < 1 = R$.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3-2x}$
מצאו פיתוח טיילור לפי טור-חזקות כך שבסיס
השבר יהיה $(x-3)$ בסביבת $x_0 = 3$.

נמצא את המקדמים:

$a_0 = f(3) = -\frac{1}{3}$

⇐נשים לב שהנגזרת מסובכת $a_1 = \frac{f'(3)}{1!}$
לכן נפעל בשיטות אלגבריות ונלביש על
הפונקציה פיתוח של פונקציות אלמנטריות ⇐

⇐המשך...

$f(x) = \frac{1}{3-2(x-3)-6} = \frac{1}{-3-2(x-3)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}(}$

$= -\frac{1}{3}\cdot[1 - \frac{2}{3}(x-3) + \frac{2^2}{3^2}(x-3)^2 - \frac{2^3}{3^3}(x$

$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(x-3) - \frac{2^2}{3^2}(x-3)^2 + \frac{2^3}{3^4}(x-3$

נמצא את R רדיוס, נתבונן ב- $\frac{1}{1+x} \sim \frac{1}{1+\frac{2}{3}(x-3)}$

$|\frac{2}{3}(x-3)| < 1 = R$

$|x-3| < \frac{3}{2} = R$

מצאו פיתוח לפונקציה $f(x) = e^{-x^2}$

בסביבת $x_0 = 0$ (לפי מקלורן):

נמצא מקדמים:

$$a_0 = f(0) = 1$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \rightarrow f'(x) = -2x \cdot e^{-2x} = 0$$

הנגזרת מסובכת לכן נשתמש בשיטה הסטנדרטית של $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...$

נציב $x \rightarrow (-x^2)$ ונקבל:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - .....$$

רדיוס ההתכנסות של e^x הוא $-\infty < R < \infty$

מצאו פיתוח לפונקציה $f(x) = \sin^2(x)$

בסביבת $x_0 = 0$ (לפי מקלורן):

נמצא מקדמים:

$$a_0 = f(0) = 0$$

$$a_1 = f'(0) = sin(2x) = 0$$

הנגזרת מסובכת לכן נשתמש בשיטה הסטנדרטית וזהויות:

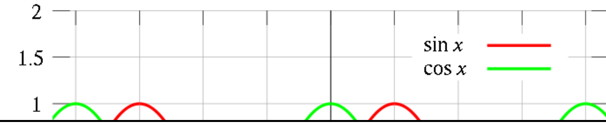
$$sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = f(x)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) = f(x)$$

נשתמש בפיתוח הסטנדרטי של $\cos(x)$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ....$$

רדיוס ההתכנסות הוא לכל $-\infty < R < \infty$



משפטים לטורים פונקציונליים וטורי חזקות

משפט (מבחן ויירשטראס)

נתון הטור הפונקציונאלי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ שמוגדר בתחום E אם קיים טור מספרי וחיובי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

לכל $x \in E$ ומתקיים $\left|f_k(x)\right| \le a_k$. החל מ-k מסוים הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה.

זאת אומרת, התכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ תלויה להתכנסות של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

הוכחה

לפי קריטריון קושי אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס זאת אומרת שלכל מספר טבעי p קיים $N(\epsilon)$ ולכל $\epsilon > 0$

מתקיים $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \epsilon$ אם נעבור לטור פונקציות נקבל

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \epsilon.$$

לפי קריטריון קושי $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \epsilon$ מתכנס במידה שווה לכל $x \in E$

ומתקיים לכל $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$ כך ש-$n > N(\epsilon)$.

∎

משפט

נתונה סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ רציפות בתחום E והטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$

מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$, אז $S(x)$ רציפה בתחום E.

זאת אומרת כדי ש-$S(x)$ תהיה רציפה חייב שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום E.

הוכחה

נניח ש-$S(x)$רציפה בקטע $x = x_0$ כך ש- $x \in E$ זאת אומרת לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ שכאשר $x \in E$ שמקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ וגם $|S(x) - S(x_0)| < \epsilon$. ניקח $\epsilon > 0$ ידוע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה. לכל $\epsilon > 0$ ולכל $x \in E$ קיים $N(\epsilon)$ כך שלכל n מתקיים $n > N(\epsilon)$ ו- $|r_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. הפונקציה $S_n(x)$ מורכב $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) +.....+ f_n(x)$ כל האיברים f_n פונקציות רציפות ב-x_0 אז קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in E$ מתקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. נתחיל להעריך,

$$|S(x) - S(x_0)| = \left| [S_n(x) + r_n(x)] - [S_n(x_0) + r_n(x_0)] \right| \le |S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x) + r_n(x_0)| \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{3} + |r_n(x)| + |r_n(x_0)| = \epsilon$$

לכן לכל $x \in E$ מתקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|S(x) - S(x_0)| < \epsilon$.

▮

מסקנה

אם סכום של טור $S(x)$ של פונקציות רציפות מתכנס לפונקציה $S(x)$ לא רציפה באותו התחום E אז הטור לא מתכנס במידה שווה.

משפט

נתונה סדרה של פונקציות $\{f_n(x)\}$ רציפות בקטע $[a, b]$ ויהא $S(x)$ סכום, הטור $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל-$S(x)$ בקטע $[a, b]$ אזי $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

הערה - לפי משפט זה אנו יכולים לבצע אינטגרציה וגזירה לכל איבר בטור.

הוכחה

נתונה סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ רציפות בקטע $[a, b]$ ומתכנס במידה שווה אזי לפי משפט שכל פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ היא אינטגרבילית ומאחר וגם $S(x)$ רציפה אזי הן אינטגרביליות.
כדי להשלים את ההוכחה מספיק להראות שלכל $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$ כך ש- $n > N(\epsilon)$ מתקיים: $\left| \int_a^b S(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b S_k(x)dx \right| < \epsilon$.

נרשום את $S(x)$ בצורה אחרת, כך: $S(x) = f_1(x) + f_2(x) +...+ f_n(x) + r_n(x)$ נקבע $\epsilon > 0$

כך ש- $|r_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ לכל $x \in [a,b]$ נבצע אינטגרציה ונקבל

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx$$

נעריך

$$\left|\int_a^b S(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx\right| = \left|\int_a^b r_n(x)dx\right| \le \int_a^b r_n(x)dx < \frac{\epsilon}{b-a}\cdot\int_a^b dx = \frac{\epsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \epsilon$$

▌

מסקנה

לפי משפט זה הגענו למסקנה שאם טור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$ לסכום $S(x)$

אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx$ כלומר $f_n(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

משפט

נתונה סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ רציפות וגזירות בקטע $[a,b]$

והטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ מתכנס במידה שווה אזי הטור של הנגזרת $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס גם במידה שווה.

ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = S'(x)$ זאת אומרת שאפשר לגזור את כל איברי הטור.

הוכחה

נסמן $\overline{S}(x)$ סכום של טור $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ לפי משפט קודם $\overline{S}(x)$ אינטגרבילית, צריך להוכיח ש-

$S'(x) = \overline{S}(x)$ נבנה פונקציה חדשה $g(x) = \int_a^x \overline{S}(x)dx$ ונגזור אותה.

$$g(x) = \int_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(t)]dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f'_k(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}[f_k(x) - f_k(a)] = S(x) - S(a)$$

זאת אומרת ש- $g(x) = S(x) - S(a)$ נגזור את המשוואה ונקבל $g'(x) = S'(x)$

ולכן משיוון $g'(x) = \bar{S}(x)$ מקבלים $\bar{S}(x) = S'(x)$ זה מוכיח ש- $S'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

.

מצאו את הסכום $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ כאשר $|x| < 1$.

פתרון- נשתמש בטור הנדסי בסכום אינסופי:

$$S = \frac{a_1}{1-q} < \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

כדי למצוא סכום של טור מבוקש $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

נגזור את הטור הידוע $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ ונקבל:

$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ...$.

מצאו את הסכום של הטור $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$ כאשר $|x| < 1$.

פתרון- נשתמש בטור הנדסי בסכום אינסופי:

$$S = \frac{a_1}{1-q} < \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

כדי למצוא סכום של טור מבוקש $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$

נבצע אינטגרל לטור הידוע $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$

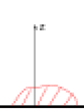
הטור מפותח בסביבה $|x| = |x - 0| < 1$ ולכן $\int_0^x \frac{1}{1-x}dx = \int_1^{1-t} \frac{-dt}{t} = -\ln t|_1^{1-t} = -\ln|1-x|$

ונקבל: $-\ln(|1-x|) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$.

פונקציות רב משתנים

$$y = f(x)$$
$$z = f(x, y)$$
$$u = f(x, y, z)$$
$$v = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

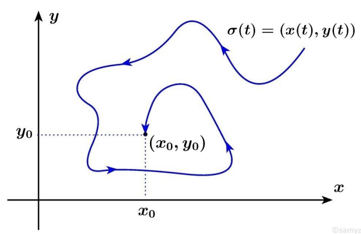
ניקח פונקציה של 2 משתנים $z = f(x, y)$, $(x, y) \in R^2 \to R^3$



פונקציה זו נקראת משטח כאשר מדובר במימד השלישי.

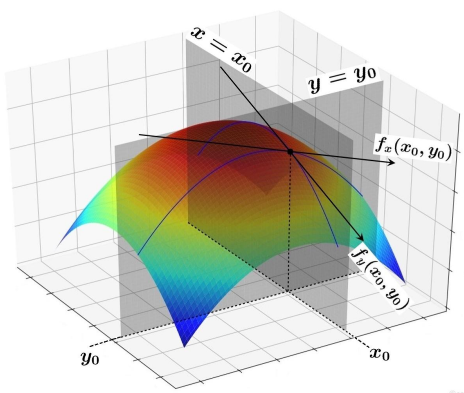
$R^2 \to R^3, \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y)$

איור זה נקרא ההיטל של R^3.



נגזרות חלקיות

תהי $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0).



הנגזרת החלקית לפי x מוגדרת על ידי הגבול (אם הוא קיים וסופי)

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

הנגזרת החלקית לפי y מוגדרת על ידי הגבול (אם הוא קיים וסופי)

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

כדי לפתור גזירה של כמה משתנים למעשה זוהי גזירה רגילה לפי משתנה אחד למשל x כאשר y,z לדוגמה הם פרמטרים.

נתונה: $z = x^2y^2 - xy^2 + x^2y + 10x - 10y + 7$

מצאו את $\frac{\vartheta z}{\vartheta y}, \frac{\vartheta z}{\vartheta x}$.

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x} = z'_x = 2xy^2 - y^2 + 2xy + 10$$

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta y} = 2yx^2 - 2yx + x^2 - 10$$

$$u(r, p) = 2R^4 \sin^2 p$$

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta r} = 8r^3 \sin^2 p$$
$$\frac{\vartheta u}{\vartheta p} = 2r^4 \cdot 2\sin p \cdot \cos p = 2r^4 \sin(2p)$$

סדר 2 של נגזרות חלקיות

נגזרת שניה לפי x: $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right) = f_{xx}$

נגזרת שניה לפי y: $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\right) = f_{yy}$

$$u(x, y) = 4x^2y^3 - 7x^4y + 10xy - 5y$$
צריך למצוא את $ux \rightarrow uxx\,,\ uy \rightarrow uyy$.
$$\frac{\vartheta u}{\vartheta x} = 8xy^3 - 28x^3y + 10y$$
$$\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2} = 8y^3 - 84x^2y = u_{xx}$$
$$\frac{\vartheta u}{\vartheta y} = 12x^2y^2 - 7x^4 + 10x - 5$$
$$\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y^2} = 24x^2y = u_{yy}$$

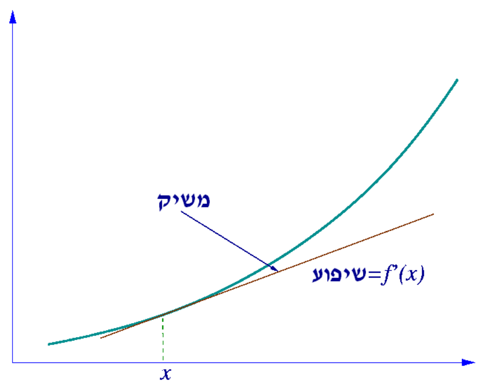
נגזרות מעורבות

גזירה לפי x: $\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta x}\right) = u_{xy}$

גזירה לפי y: $\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y \vartheta x} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta y}\right) = u_{ya}$

$$u = x^2y^3 - x^3y^2 + 10xy - 8y$$
צריך למצוא נגזרות מעורבות: $u_{xy},\ u_{yx}$.
$$u_x = \frac{\vartheta u}{\vartheta x} = 2xy^3 - 3x^2y^2 + 10y$$
$$u_{xy} = \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x \vartheta y} = 6xy^2 - 6x^2y + 10$$
$$u_y = \frac{\vartheta u}{\vartheta y} = 3y^2x^2 - 2yx^3 + 10x - 8$$
$$u_{yx} = \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y \vartheta x} = 6xy^2 - 6x^2y + 10$$
מסקנה - $\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y \vartheta x} = \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x \vartheta y}$ וגם $u_{xy} = u_{yx}$

פירוש הנדסי של נגזרות חלקיות



מַשִּׁיק לעקומה בנקודה כלשהי הוא ישר העובר דרך אותה נקודה, ושיפועו שווה לנגזרת העקומה באותה נקודה. נקודת ההשקה היא הנקודה היחידה המשותפת למשיק ולישר באזור ההשקה. המשיק עשוי לחתוך את העקומה, או להשיק לה, בנקודות אחרות, גם ליד נקודת ההשקה.

אם פונקציה גזירה בנקודה x_0, משוואת המשיק בנקודה זו היא $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

מבחינה הנדסית נגזרות חלקיות מייצגת מישור משיק בין המשטח לבין הצירים.

משוואת מישור משיק

$\frac{z=f(x,y)}{F(x,y,z,)=0}$ פונקציה בצורה מפורשת.

נקודת השקה $M(x_0, y_0 z_0)$.

$$\frac{\vartheta F(M_0)}{\vartheta x} \cdot (x - x_0) + \frac{\vartheta F(M_0)}{\vartheta y}(y - y_0) + \frac{\vartheta F(M_0)}{\vartheta\, z}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{\vartheta f(M_0)}{\vartheta x}(x - x_0) + \frac{\vartheta f(M_0)}{\vartheta y}(y - y_0) = z - z_0$$

נתון משטח $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$.

מצאו את משוואת מישור משיק בנקודה $M_0(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

נבדוק תחילה אם הנקודה נשענת במשטח: $6 + 2 \cdot \frac{6}{4} + 3 \cdot \frac{6}{9} = 11$

נגזור כל ביטוי:

עבור x^2 : $\frac{\vartheta F(M_0)}{\vartheta x} = 2\sqrt{6}$

עבור $2y^2$: $\frac{\vartheta F(M_0)}{\vartheta y} = 2\sqrt{6}$

עבור $3z^2$: $\frac{\vartheta F(M_0)}{\vartheta z} = 2\sqrt{6}$

נציב במשוואה שלנו:

$$2\sqrt{6} \cdot (x - \sqrt{6}) + 2\sqrt{6} \cdot (y - \frac{\sqrt{6}}{2}) + 2\sqrt{6} \cdot (z - \frac{\sqrt{6}}{3}) = 0$$

נוציא גורם משותף ונקבל שמשוואת מישור המשיק שלנו היא: $x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}}$

-סוף-