דף נוסחאות - הסתברות 2

חסמים

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ'רנוף: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ ב"ת בקטע $[0,1]$ ויהי $X = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$

1. לכל $t > 0$ ממשי מתקיים: $P(|X - E(X)| \geq t) \leq 2e^{(-2t^2/n)}$

$\Pr(X \leq E(X) - t) \leq e^{(-2t^2/n)}$ || $\Pr(X \geq E(X) + t) \leq e^{(-2t^2/n)}$

2. לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\Pr(X \leq (1-\varepsilon) \cdot E(X)) \leq e^{(-\varepsilon^2 \cdot E(X))/2}$.

עבור $\Pr(X \leq a)$ נוסחת החישוב עבור אפסילון: $\varepsilon = 1 - \frac{a}{E(X)}$.

3. לכל $0 < \varepsilon \leq \frac{3}{2}$: $\Pr(X \geq (1+\varepsilon) \cdot E(X)) \leq e^{(-\varepsilon^2 \cdot E(X))/3}$.

עבור $\Pr(X \geq a)$ נוסחת החישוב עבור אפסילון: $\varepsilon = \frac{a}{E(X)} - 1$.

אי-שוויון צ'רנוף הופדינג: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ ב"ת כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים:

$\Pr(X_i = 1) = \Pr(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ ויהי $X = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$

אזי לכל $t > 0$ מתקיים:

$\Pr(X \geq t) \leq e^{-(t^2/2n)}$, $\Pr(X \leq -t) \leq e^{-(t^2/2n)}$

<u>נוסחאות הזזה (נרמול)</u>: צ'רנוף בקטע $[0,1]$ והופדינג בערכים $\{-1, 1\}$.

- הזזה עבור צ'רנוף: $Y_i = \frac{X_i - min}{max - min}$ וגם: $X_i = \left((max - min) \cdot Y_n + min\right)$
- הזזה עבור הופדינג: $Y_i = \frac{2}{max - min} \cdot (X_i - max) + 1$.

מומנטים

מומנט ראשון - מ"מ X עם ערכים $\mathbb{N}^+$, אם כאשר $n \to \infty$ ה-$E(X) = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \Pr(X = 0) = 1 \Leftarrow \Pr(X \geq 1) \leq E(X)/1 = E(X)$

מומנט שני - מ"מ X עם ערכים $\mathbb{N}^+$, נניח כי עבור n כלשהו, כאשר $n \to \infty$ אז $E(X) \geq 1$. לכן $\Pr(X \geq 1) = 1$ וגם $\Pr(X = 0) = 0$ צריך להוכיח כי: $P(X = 0) \leq \frac{Var(X)}{(E(X))^2}$.

קבוצת סכומים שונים - קבוצה $S = \{x_1, ..., x_k\}$ של $\mathbb{N}^+$ תקרא בעלת סכומים שונים אם 2^k הסכומים $\Sigma_{i\in S} x_i$ שונים זה מזה לכל $S \subseteq \{1,..., k\}$.

משפטי גבול

תהי $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים, על אותו מרחב הסתברות, בעלי תוחלת סופית μ, אזי לכל $\varepsilon > 0$ ממשי:

1. החוק החלש של המספרים הגדולים:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

2. החוק החזק של המספרים הגדולים (בנוסף עם <u>שונות סופית</u>):

$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + ... + X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

התכנסות בהסתברות: סדרת מ"מ $\{X_n\}$ מתכנסת בהסתברות למ"מ X אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left\{\omega \in \Omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$

התכנסות כמעט בוודאות: סדרת מ"מ $\{X_n\}$ מתכנסת כמעט בוודאות למ"מ X אם מתקיים: $\Pr\left(\left\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$.

- "התכנסות כמעט בוודאות" $\Leftarrow$ "התכנסות בהסתברות" ההפך לא תמיד נכון.

אלגוריתמים

לאס וגאס - אלגוריתם שתמיד צודק בתשובה אבל זמן הריצה שלו תלוי במ"מ. (כמו למשל אלגוריתם RandQS).

מונטה קרלו - אלגוריתם שטועה בהסתברות (בדרך כלל נמוכה):

1. <u>טעות חד צדדית</u>: אם צריך להחזיר true אז האלגוריתם תמיד צודק. אם צריך להחזיר false אז האלגוריתם יכול להחזיר true בהסתברות נמוכה. (או להיפך)
2. <u>טעות דו צדדית</u>: בכל מקרה יש טעות (נמוכה) בהסתברות.

- זמן הריצה הממוצע של $RandQS$ הוא $\Theta(n \ln n)$.

חסמים מוכרים

$\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$	$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq n^k$	$(1-p)^x \geq e^{-px(1+p)}$
$(1-x)^n \leq e^{-xn}$ בתנאי ש: $0 \leq x \leq 1$.		$(1-x) \leq e^{-x}$ $(1+x) \leq e^{x}$

חשוב לזכור

- אם יש $<$ ורוצים $\leq$ צריך לדעת שזה מגדיל את ההסתברות.
- במרחב הסתברות רציף $\Pr(a < X < b) = \Pr(a \leq X \leq b)$.
- $\Pr(|X| \leq a) = \Pr(-a \leq X \leq a) = \Pr(X \leq a) - \Pr(X < -a)$
- $\Pr(|X| \geq a) = \Pr(X \leq -a \quad OR \quad X \geq a)$
- $\Pr(A > B) = 1 - \Pr(A \leq B)$
- $\Pr(|A| > B) = 1 - \Pr(|A| \leq B) = 1 - \Pr(-B \leq A \leq B)$
- $\Pr(X = 0) = 1 - \Pr(X \geq 1)$
- $\Pr(|X - E(X)| \geq t) = 1 - \Pr(E(X) - t \leq X \leq E(X) + t)$
- $E(X \geq 1) \leq E(X)$
- נוסחת השורשים: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- פונקציה ממעלה שניה: $y = ax^2 + bx + c = 0$
- כל מ"מ מתפלג בינומי מורכב מאינדיקטורים וניתן לעשות עליו חסם צ'רנוף.
- צלעות בגרף: $\binom{n}{2}$, ספירה של כמות מתוך סה"כ האופציה לצלעות: $\binom{\binom{n}{2}}{k}$.
- **סטיית התקן** של X מוגדרת: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}$.
- כדי להוכיח ש**קיימת** קבוצה כלשהי, נראה שההסתברות לקבל "קבוצה רעה" קטנה ממש מ-1.

גרפים

גרף שלם - או "מלא" הוא גרף G אשר בכל שני צמתים בגרף יש קשת.

קליקה - <u>תת גרף שלם</u> (שכולם מחוברים בו לכולם).

קבוצה בלתי תלויה בגרף - קבוצה ב-G שבה נמצאים כל V שאין ביניהם E

מספר רמזי $R(k,l)$ עבור $k, l \in \mathbb{N}^+$ הוא ה-n הקטן ביותר כך שכל גרף עם n קודקודים מכיל קליקה מגודל k או קבוצה בלתי תלויה מגודל l.

משפט הרדוס 47 - יהיו $n, t \in \mathbb{N}^+$ המקיימים: $\binom{n}{t} \cdot 2^{1-\binom{t}{2}} < 1$ אז: $R(t,t) > n$ זה אומר שאין קליקה בגודל t ואין קבוצה ב"ת בגודל t.

מסקנה - לכל $t \geq 4$ מתקיים: $R(t,t) > \lfloor 2^{t/2} \rfloor$.

גרף טורניר - גרף שלם שכל קשת מכוונת <u>מאחד</u> משני הכיוונים האפשריים.

קודקוד שולט - קודקוד u שולט על תת-קבוצה של קודקודים A אם הוא לא שייך לקבוצה A וגם הוא "מצביע" ב צלע על כל הקודקודים בקבוצה.

משפט הרדוס 63 - יהיו $k, n \in \mathbb{N}^+$ כך: $\binom{n}{k}\left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < 1$

אזי קיים גרף טורניר עם n קודקודים המקיים S_k.

קבוצה שולטת - יהי $G = (V,E)$ גרף. קבוצה $S \subseteq V$ תקרא קבוצה שולטת אם לכל $v \in V/S$ קיים $u \in S$ כך שיש צלע: $uv \in E$. כלומר כל קודקוד v שהוא מחוץ לקבוצה S מחובר לפחות לקודקוד אחד u שהוא כן בקבוצה S.

משפט - יהי $G = (V,E)$ גרף על n קודקודים עם דרגה מינימלית $\delta > 1$.

אזי קיימת ב-G קבוצה שולטת S כך ש: $|S| \leq \frac{n \cdot [1 + \ln(\delta+1)]}{\delta+1}$.

הערה - בכל מרחב הסתברות קיים איבר שערכו קטן או שווה מהתוחלת וקיים איבר שערכו גדול או שווה מהתוחלת. בפרט, קיימת S שולטת: $|S| \leq \frac{n \cdot [1 + \ln(\delta+1)]}{\delta+1}$.

המותן (Girth) של גרף G שנסמן ב-$g(G)$ הוא אורך המעגל הקצר ביותר ב-G.

- גרף ותהי $S \subseteq V$. נאמר ש-S **קבוצה בלתי תלויה** אם היא אינה מכילה קשתות, כלומר $xy \notin E$ לכל $x, y \in S$.

מודל G(n,m): מרחב ההסתברות של כל הגרפים בעולם עם n קודקודים ו m צלעות כאשר ההסתברות היא "איפה להניח את הצלעות". יש $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ גרפים שונים. ולכן ההסתברות לכל גרף היא: $P(G \in G(n,m)) = \binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}$ בהתפלגות אחידה.

מודל בינומי G(n,p): מרחב ההסתברות של כל הגרפים בעולם עם n קודקודים. כאשר לכל צלע, ההסתברות לשים אותה בגרף היא p וההסתברות לגרף מוגדרת: $P(G \in G(n,p)) = p^{|E|} \cdot (1-p)^{\binom{n}{2} - |E|}$

- הגרף $B(n, n, 1/2)$ הוא גרף דו-צדדי עם 2 קבוצות n קודקודים לכל קבוצה ו-½ לצלע

תכונה של גרפים: תכונה Q של גרפים יכולה לתאר לדוגמא: גרף קשיר, יש קודקוד בודד בגרף וכו'... כאשר גרף G מקיים את התכונה נסמן ש $G \in Q$.

כלומר, תכונה היא קבוצת כל הגרפים שמקיימים אותה.

חשיפה בשלבים - **Staged Exposure** - יהי k מספר טבעי ויהיו $0 \leq p, p_1, ..., p_k \leq 1$ המקיימות: $1 - p = \Pi_{i=1}^{k}(1 - p_i)$ אזי $G(n,p)$ ו- $\cup_{i=1}^{k} G(n, p_i)$ אותו מרחב הסתברות.

תכונה מונוטונית: לכל תכונה מונוטונית Q מתקיים ש:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(G(n,m) \in Q) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Pr(G(n,p) \in Q) = 1$$

- מרחב ההסתברות $G(n, \frac{1}{2})$ הוא מרחב הסתברות אחיד.

עולה: תכונה Q שאם היא מתקיימת בגרף אז הוספה של צלעות תשמור על התכונה. כלומר לא ייתכן שנוסיף צלעות והתכונה כבר לא תתקיים.

יורדת: תכונה Q שאם היא מתקיימת בגרף אז החסרה של צלעות תשמור על התכונה. כלומר לא ייתכן שנחסיר צלעות והתכונה כבר לא תתקיים.

הגדרות של תכונה מונוטונית עולה (סימטרי ליורדת) -

- $\Pr(G(n,1) \in Q) = 1$ לכל תכונה $Q \neq \emptyset$.
- אם $p_1 \leq p_2$ אז $\Pr(G(n,p_1) \in Q) \leq \Pr(G(n,p_2) \in Q)$.

סף - נאמר ש: $p_0 = p_0(n)$ הוא סף לקיום תכונה Q מונוטונית עולה:

$\Leftarrow$ אם $p \gg p_0$ (כלומר $p = \omega(p_0)$) אז: $\lim_{n\to\infty} \Pr(G(n,p) \in Q) = 1$.

$\Leftarrow$ אם $p \ll p_0$ (כלומר $p = o(p_0)$) אז: $\lim_{n\to\infty} \Pr(G(n,p) \in Q) = 0$.

הערה - עבור $\gg$, $\ll$ מותר לבצע פעולות חילוק וכפל בין האגפים אבל אסור $+, -$.

סף חד - סף p_0 של תכונה Q יקרא **סף-חד** אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$\Leftarrow$ אם $p \geq (1+\varepsilon)p_0$ אז: $\lim_{n\to\infty} \Pr(G(n,p) \in Q) = 1$

$\Leftarrow$ אם $p \leq (1-\varepsilon)p_0$ אז: $\lim_{n\to\infty} \Pr(G(n,p) \in Q) = 0$

- לכל תכונה מונוטונית יש סף אבל לא בהכרח שיש לה סף חד.

סד"פים

<u>סד"פ חסם הסתברותי באמצעות צ'רנוף:</u>

(1) קיבלנו $X_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$.

(2) בדיקה שהמשתנים מקבלים ערכים בטווח $[0,1]$.

(3) אם המשתנים לא בטווח הזה אז נבצע את השלבים הבאים:

- **(a)** נבצע הזזה: $Y_i = \frac{X_i - min}{max - min}$.
- **(b)** נגדיר את $Y_n = \Sigma_{i=1}^{n} Y_i$
- **(c)** נגדיר את X_n באמצעות Y_n, ואז נציב באי שוויון. כלומר, $X_i = (max - min) \cdot Y_i + min$

(4) נמצא את התוחלת של המשתנה עליו נפעיל את צ'רנוף (X_n או (אם לא היה צריך הזזה), או Y_n שקיבלנו אחרי ההזזה.

(5) נתחיל לפשט את המשוואה שקיבלנו ונמצא באיזה צ'רנוף יהיה הכי נוח להשתמש (בהתאם לתוחלת וכו').

<u>משתנה מקרי רציף ופונקציות צפיפות:</u>

- **"מצאו את a,b"**: אם יש לנו פונ' מפוצלת אז צריך לעשות אינטגרל מ.. עד.. לפי ערכי הפונקציה.
- **"הסתברות שיש a פתרונות למשוואה"**: נבדוק בנוסחת השורשים מתי $b^2 - 4ac > 0$, נבדוק מתי חיובי. אם הפרבולה ∩ או ∪ ונחליט מה הטווח.
- **"הוכח פונק' צפיפות"**: להראות שהאינטגרל שלה בין הערכים שווה בסוף ל-1.
- **"פונק' צפיפות מצטברת"**: להראות לפי a כלשהו ולהציג את פונ' הצפיפות לכל טווח הערכים. *<u>לזכור</u>*: הטווח העליון תמיד יהיה a.

מרחב הסתברות רציף

במרחב כזה, כל דגימה לא תקבל הסתברות אלא כל תת קבוצה לא בת מניה תקבל הסתברות. במרחב הסתברות כזה: $\Pr: \Pr(\Omega) \to [0,1]$.

$\Pr(\omega) = 0$	$\Pr(A) = 0$ לכל A בת מניה
$\Pr(\Omega) = 1$.	$0 \leq \Pr(X) \leq 1$

סיגמא אלגברה - אם Ω סופית או בת-מניה אז 2^{Ω} היא סיגמא אלגברה ונסמן ב- $\mathcal{F}$. זה קבוצה שיש בה את $\emptyset$, את הכל והיא סגורה לפעולות על קבוצות כאשר מספר הפעולות הוא בן מניה.

משתנה מקרי רציף - $\Pr(X \in B) = \int_B f_X(x)dx$.

פונקצית הצפיפות - $\Pr(\mathbb{R} = \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. (תנאי למרחב הסתברותי).

פונקצית ההסתברות המצטברת: $F_X(a) = \Pr(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$

תוחלת של מ"מ <u>רציף</u>: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$ || $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$

תכונות : $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$ || $E(X) = \int_0^{\infty} \Pr(X > x)dx$

לינאריות התוחלת: $E(aX + b) = aE(X) + b$.

תכונות של שונות - הם בדיוק אותו הדבר כמו שנלמד בקורס הסתברות 1.

$$\Pr(a < X < b) = \Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

$\Pr(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$ || $\Pr(X > a) = 1 - F_x(a)$

התפלגות רציפה אחידה

נאמר שמ"מ (רציף) X מתפלג אחיד על הקטע $[a,b]$ אם היא בעל פונקצית צפיפות.

פונקציית צפיפות: אם $a \leq x \leq b$ אז $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$.

פונקציית ההסתברות המצטברת:

- אם $x < a$ אז $F_X(x) = 0$.
- אם $a \leq x \leq b$ אז $F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$.
- אם $x > b$ אז $F_X(x) = 1$.

תוחלת: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ || $E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$ **שונות:** $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

התפלגות אקספוננציאלית / מעריכית - פרמטר $\lambda > 0$. ונסמן $X \sim Exp(\lambda)$.

מ"מ X מתפלג מעריכית עם λ אם היא בעל הצפיפות הבאה:

פונקצית צפיפות: $x \geq 0$ אז $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ אחרת $f_X(x) = 0$

פונקציית ההסתברות המצטברת: אם $x \geq 0$ אז:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

תוחלת: $E(X) = 1/\lambda$ || $E(X^2) = 2/\lambda^2$ **שונות:** $Var(X) = 1/\lambda^2$

חוסר זיכרון - לכל $s, t \in R^+$: $\Pr(X > s + t | X > t) = \Pr(X > s)$

$\Pr(X > s + t) = \Pr(X > s) \cdot \Pr(X > t)$

- *<u>משפט</u>*: משתנה רציף אי-שלילי - חסר זיכרון $\Leftrightarrow$ מתפלג מעריכית.
- לכל $x \in \mathbb{R}$ נסמן: $g(x) = \Pr(X > x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}$
- לכל m ו-n טבעיים מתקיים: $g\left(\frac{m}{n}\right) = g^m\left(\frac{1}{n}\right) = g(1)^{\frac{m}{n}}$

התפלגות נורמלית - כאשר $\sigma > 0$ היא הסטיית תקן

פונקציית הצפיפות: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

תוחלת: $E(X) = \mu$ **שונות:** $Var(X) = \sigma^2$

התפלגות נורמלית סטנדרטית: במקרה ש: $\mu = 0, \sigma = 1$

פונקציית ההסתברות המצטברת: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$

מ"מ נורמלי סטנדרטי: כדי להמיר מ"מ שמתפלג נורמלי למ"מ שמתפלג סטנדרטי עושים הזזה כך: $Y = (X - \mu)/\sigma$.

אם Y מ"מ נורמלי סטנדרטי אז: $F_X(a) = \Pr(X \leq a) = \Pr\left(Y \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

- אם X מתפלג נורמאלית וגם $Y = aX + b$. אז Y מתפלג נורמאלית עם ממוצע $a\mu + b$ ושונות: $a^2\sigma^2$. לכן כדי להמיר משתנה שמתפלג נורמאלית למשתנה שמתפלג נורמאלית סטנדרטית עושים הזזה: $Z = (X - \mu)/\sigma$.
- לכל $x \in R$. $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- $\Pr(-a < X < a) = 2\Phi(a) - 1$.

משפט הגבול המרכזי - CLT

תהי $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של מ"מ ב"ת ובעלי אותה התפלגות עם תוחלת μ ושונות $\sigma^2 > 0$ סופית .

לכל n טבעי יהי: $Y_n = \frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

<u>פונקצית ההסתברות המצטברת</u>: $F_n(a) = \Pr(Y_n \leq a)$.

תהי $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx$ אז: $\lim_{n\to\infty} F_n(a) = \Phi(a)$.

המשפט עוזר כאשר לא ידועה ההתפלגות אלא רק הממוצע וסטיית התקן, לכן נעבור להתפלגות נורמלית כי שם יש לנו את הטבלה. כלומר Y_n מתפלג נורמלית באינסוף. המשפט יעזור לנו לחשב חסמים דו-כיווניים בצורה מהירה ומדויקת יותר.

- $\Pr(A < X < B) = \Pr\left(\frac{A - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} < \frac{X - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} < \frac{B - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\right)$
- $\Pr(-a < Z < a) = \Pr(Z < a) - \Pr(Z < -a) \approx \Phi(a) - \Phi(-a) = \\ = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$
- $\Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b} e^{-x^2/2}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx$

משפט: (Berry-Esseen)

אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של אינסוף מ"מ ב"ת אחד בשני בעלי התפלגות זהה עם תוחלת 0 ושונות σ^2 כאשר $\sigma > 0$. בנוסף: $E(|X_i|^3) = \rho$ אם נסמן לכל $n \in N$: $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{\sigma\sqrt{n}}$. כך ש F_n היא <u>פונקציית ההסתברות המצטברת</u> של Y_n. אז: $|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$.

המשפט מבטיח, בהינתן התנאים הנ"ל את הקצב שבו מתקרבים להתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית. לא רק שנשאף ל-Φ כמו שראינו ב-CLT אלא אפשר להגיד לכל n כמה אנחנו רחוקים מ-Φ וזה היתרון של המשפט.

הסתברות 1

מאורעות זרים: $\Pr(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\Pr(A_n)$.

איחוד לא זר: $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

חסם איחוד - Union Bound: $\Pr(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) \le \Sigma_{n=1}^{\infty}\Pr(A_n)$.

הסתברות מותנית - אם A ו-B מאורעות כך ש- $\Pr(B) > 0$, אז:
$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}$$

חוק ההסתברות השלמה: כך ש- $0 < \Pr(B) < 1$, אז:
$$\Pr(A) = \Pr(B)\Pr(A|B) + \Pr(B^c)\Pr(A|B^c)$$

חוק בייס: $\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B)\cdot\Pr(A|B)}{\Pr(A)}$.

זוג מאורעות בלתי-תלויים: אמ"מ: $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\cdot\Pr(B)$
בנוסף,A בלתי תלוי ב-B אמ"מ $\Pr(A|B) = \Pr(A)$.

מאורעות בלתי-תלויים: $\Pr(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I}\Pr(A_i)$.

משתנים מקריים בלתי-תלויים: $X_1, X_2,..., X_n$ בלתי תלויים אם:
$$\Pr(X_1 = x_1,..., X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n}\Pr(X_i = x_i)$$

תוחלת: $E(X) = \Sigma_k \Pr(X = k)\cdot k \;||\; E(X^2) = \Sigma_k \Pr(X = k)\cdot k^2$

ליניאריות התוחלת: יהי $a \in \mathbb{R}$ אז:

$E(aX) = aE(X)$	$E(a) = a$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	

תכונות של תוחלת

אם $X \le Y$ לכל הערכים אז $E(X) \le E(Y)$.

אם X, Y בלתי תלויים אז: $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$.

$E(X\cdot Y) = \Sigma_a\Sigma_b ab\cdot\Pr(X = a, Y = b)$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

$E(X + Y|Y = y) = E(X|Y = y) + y$

$E(X\cdot Y|Y = y) = y\cdot E(X|Y = y)$

$E(X) = \Sigma_{i=1}^{k}E(X|A_i)\cdot\Pr(A_i)$

תוחלת מותנה: $E(Y|X = n) = \Sigma_k k\cdot\Pr(Y = k|X = n)$

תוחלת שלמה: $E(X) = E(E(X|Y)) = \Sigma_y \Pr(Y = y)\cdot E(X|Y = y)$

שונות - עבור משתנה מקרי X עם תוחלת סופית:
$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ליניאריות השונות: יהי $a \in \mathbb{R}$ אז:

אם X, Y תלויים: $Var(X \pm Y) = Var(X) \pm 2Cov(X,Y) + Var(Y)$
אם X, Y בלתי תלויים: $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

$Var(X|Y = k) = E(X^2|Y = k) - [E(X|Y = k)]^2$

$Var(X + a) = Var(X)$	$Var(aX) = a^2Var(X)$
תמיד אי שלילית: $Var(X) \ge 0$.	$Var(a) = 0$

שונות השלמה: $Var(X) = E(\,Var(X|Y)\,) + Var(\,E(X|Y)\,)$

מקדם המתאם: $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$.

$\vert\rho(X,Y)\vert \le 1$	$\rho(X + a, Y) = \rho(X,Y)$
$\rho(X,X) = 1$	$\rho(aX, Y) = \frac{a}{\vert a\vert}\cdot\rho(X,Y)$
$\rho(aX, bY) = ab\cdot\rho(X,Y)$	

$\rho(X,Y) = 0$ רק אם $Cov(X,Y) = 0$ רק אם X, Y בלתי-תלויים.

שונות משותפת - לחשב שונות כשהמשתנים המקריים <u>תלויים</u>.
$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

1. $Cov(X,X) = Var(X)$.
2. אם X, Y בלתי תלויים $\Leftarrow$ הם לא מתואמים $\Leftarrow$ $Cov(X,Y) = 0$
3. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
4. $Cov(aX, bY) = a\cdot b\cdot Cov(X,Y)$
5. $Cov(aX + bY, Z) = a\cdot Cov(X,Z) + b\cdot Cov(Y,Z)$
6. $Cov(X + Z, Y + W) = Cov(X,Y) + Cov(X,W) + Cov(Z,Y) + Cov(Z,W)$
7. $Cov(\Sigma_{i=1}^{n}X_i, \Sigma_{j=1}^{m}Y_j) = \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{m}Cov(X_i Y_j)$
8. $Var\left(\Sigma_{i=1}^{n}X_i\right) = \Sigma_{i=1}^{n}Var\left(X_i\right) + 2\Sigma_{i<j}Cov\left(X_i, X_j\right)$

אינדיקטורים

אינדיקטור של X_i מתפלג ברנולי, כלומר $X_i = 0$ או $X_i = 1$.

נסמן $X = \Sigma_{i=1}^{n}X_i$ ולפי לינאריות התוחלת $E(X) = \Sigma_{i=1}^{n}E(X_i)$.

- <u>תוחלת</u> של אינדיקטור: $E(X_i) = \Pr(X_i = 1)$.
- <u>שונות</u> של אינדיקטור: $Var(X_i) = \Pr(X_i = 1)\cdot\Pr(X_i = 0)$.
- <u>שונות משותפת</u> של אינדיקטור (עבור המקרה ששניהם יקרו):
$Cov(X_i, X_j) = \Pr(X_i = 1, X_j = 1) - \Pr(X_i = 1)\Pr(X_j = 1)$

קומבינטוריקה

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$
$\Sigma_{k=1}^{n}k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$	$\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

	אין חזרות	יש חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

נגזרות

$(a^x)' = a^x\ln(a)$	$(e^x)' = e^x$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$

אינטגרלים

$\int\frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln\vert ax+b\vert}{a}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\int e^{mx+n}dx = \frac{e^{mx+n}}{m}$	$\int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln(a)}$
$\int\frac{1}{x}dx = \ln\vert x\vert$	$\int(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$

אינטגרציה בחלקים: $\int_a^b f\cdot g' = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'\cdot g$

$\int_{-\infty}^{\infty}\vert x\vert dx = \int_{-\infty}^{0} - xdx + \int_0^{\infty}xdx$	$\int_{-\infty}^{\infty} - \vert x\vert dx = \int_{-\infty}^{0}xdx + \int_0^{\infty} - xdx$

בגבולות: $\int_{-\infty}^{0}ae^x dx + \int_0^{\infty}ae^{-x}dx = \lim_{i\to-\infty}\left[ae^x\right]_i^0 + \lim_{j\to\infty}\left[-ae^{-x}\right]_0^j$

התפלגות אחידה $U(S)$ (לכל $s \in S$ כאשר S קבוצה סופית)

$Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\Pr(X = k) = \frac{1}{\vert S\vert}$

דוגמה: הסתברות שווה לכל ערך. כל ניסוי שנעשה באופן אחיד. למשל, קוביה הוגנת. אם המשתנה המקרי לא תלוי בk אזי הוא מתפלג אחיד כלומר, אם כשפותחים את $\mathbb{p}(X = k)$ מקבלים ביטוי ללא k, אזי ניתן להסיק כי Xמתפלג אחיד.

התפלגות ברנולי $Ber(p)$ בערכים $(p \in \mathbb{R}: 0 \le p \le 1)$

$Var(X) = p\cdot(1 - p)$	$E(X) = p$	$\Pr(X = 1) = p, \Pr(X = 0) = 1 - p$

דוגמה: אינדיקטור. ניסוי מקרי. כן או לא. למשל, הטלת מטבע.

התפלגות בינומית $Bin(n,p)$ בערכים $n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}: 0 \le p \le 1,\ \ 0 \le k \le n$

$Var(X) = n\cdot p\cdot(1 - p)$	$E(X) = np$	$\Pr(X = k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1 - p)^{n-k}$

דוגמה: מספר הצלחות. ניסוי עם הסתברות p להצלחה, ועריכת הניסוי n פעמים.
$\mu(k)$ מייצג את כמות הפעמים שהצלחנו מתוך n הפעמים.

התפלגות גיאומטרית $Geom(p)$ $(k \in \mathbb{N}^+, p \in \mathbb{R}: 0 < p < 1)$

$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\Pr(X = k) = (1 - p)^{k-1}\cdot p$

דוגמה: מספר ניסויים עם הסתברות p עד (כולל) ההצלחה הראשונה.

התפלגות היפר גיאומטרית $Hyp(N, D, n)$ $(N,\ D,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n)$

$Var(X) = \frac{D\cdot n\cdot(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$	$E(X) = \frac{n\cdot D}{N}$	$\Pr(X = k) = \frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

k הכדורים האדומים מתוך N כדורים כאשר D מתוכם הם אדומים ובוחרים n כדורים **ללא החזרה**.

התפלגות פואסונית $Poi(\lambda)$ $(\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \lambda \in \mathbb{R}: \lambda > 0\ )$

$Var(X) = \lambda$	$E(X) = \lambda$	$\Pr(X = k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

דוגמה: התפלגות פואסון מתקבלת כאשר סופרים אירועים המתרחשים בפרק זמן קבוע. הנוסחה מתארת את הסיכוי שיקרו k אירועים בזמן פרופורציונלי ל-λ(קצב ממוצע).

התפלגות בינומית שלילית $NB(r,p)$ $r, k \in \mathbb{N}: k \ge r,\ p \in \mathbb{R}: 0 < p < 1$

$Var(X) = \frac{r\cdot(1-p)}{p^2}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\Pr(X = k) = \binom{k-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1 - p)^{k-r}$

מספר ניסויים עד (כולל) ההצלחה ה-r. למשל, אם נטיל מטבע שוב ושוב, נגדיר כישלון כעץ ונעצור כאשר נקבל עץ בפעם ה-r, אז מספר ההצלחות (קבלת "פלי") שנקבל, מתפלג באופן בינומי שלילי.

נוסחאות טורים

גיאומטרי	$\Sigma_{n=0}^{\infty}q^n = \frac{a_1}{1-q}$	חזקות	$\Sigma_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$
טיילור	$\Sigma_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{\lambda}$	בינום	$\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k} = (x + y)^n$

$\Sigma_{i=1}^{n}i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$	$\Sigma_{i=1}^{n}i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

טורים בטווח $(s.t.\ \ -1 < x < 1)$:

$\Sigma_{i=0}^{\infty}(i + 1)\cdot x^i = \frac{1}{1-x}$ ||| $\Sigma_{i=0}^{\infty}i\cdot x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ ||| $\Sigma_{i=0}^{\infty}a\cdot x^i = \frac{a}{1-x}$

$$\Sigma_{i=1}^{\infty}i\cdot(\tfrac{1}{2})^i = \Sigma_{i=1}^{\infty}i\cdot(\tfrac{1}{2})^{i-1}\cdot(\tfrac{1}{2}) = 1$$

שיטות סכומי טורים

$\mathbb{p}(X > a) = \Sigma_{x=a+1}^{\infty}\mathbb{p}(X = x)$	$\mathbb{p}(X \ge a) = \Sigma_{x=a}^{\infty}\mathbb{p}(X = x)$

עבור X מ"מ המקבל רק ערכים אי שליליים- $E(X) = \Sigma_{k=0}^{\infty}\mathbb{p}(X > k) = \Sigma_{k=1}^{\infty}\mathbb{p}(X \ge k)$

עבור מ"מ בלתי תלויים מתקיים: $\mathbb{p}(X \ge a,\ Y \ge b) = \Sigma_{x=a}^{\infty}\Sigma_{y=b}^{\infty}\mathbb{p}(X = x,\ Y = y)$
$= (\,\Sigma_{x=a}^{\infty}\mathbb{p}(X = x)\,)\cdot(\,\Sigma_{y=b}^{\infty}\mathbb{p}(Y = y)\,)$

סד"פ קיימת צביעה

1. נקבע צביעה אחידה וב"ת עבור $\{1,..., n\}$. (כלומר הסתברות של $\frac{1}{\text{מספר הצבעים}}$).
2. נרצה להראות כי $P(\text{מתקיים התנאי}) > 0$.
3. נגדיר אינדיקטור של הטעות עבור קבוצה בודדת- X_i.
4. נגדיר מ"מ $X = \Sigma X_i$ (לחשוב אולי זה התפלגות נפוצה).
5. נמצא את התוחלת של X ובעזרתה נפתור נמצא חסם.
6. נראה $P(X\ge1) \le (?)$.
7. נקבל $P(\text{מתקיים התנאי}) = P(X = 0) = 1 - P(X\ge1) > (1 - ?)$.

יהי $U \sim U[0,1]$ וגם יהיה $X = -\ln(1 - U)$. הוכיחו ש: $X \sim Exp(1)$.

פתרון: עבור $x \ge 0$. נחשב את פונקציית ההסתברות המצטברת של X.
$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \Pr(-\ln(1 - U) \le x) = \Pr(\ln(\frac{1}{1-U}) \le x) =$
$= \Pr(\frac{1}{1-U} \le e^x) = \Pr(U \le 1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}$
ולכן אם $x \ge 0$ אז $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-x}$. כלומר, $X \sim Exp(1)$.

תרגילים

תהי $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של מ"מ בלתי תלויים כך ש: $X_i \sim U(\{-1, 0, 1\})$ והי $S_n = \Sigma_{i=1}^{n}X_i$.

א. השתמשו באי שוויון צ'רנוף כדי למצוא חסם עליון טוב ככל האפשר על $\Pr\left(\left|S_n\right| > 2\sqrt{n}\right)$.

ב. השתמשו במשפט הגבול המרכזי כדי למצוא הערכה טובה ככל האפשר ל $\Pr\left(\left|S_n\right| > 2\sqrt{n}\right)$

פתרון א': לפי צ'רנוף צריך שטווח הערכים של כל משתנה מקרי בסכום יהיה בין 0 ל-1.
כדי להזיז משתנה X_i שהוא בטווח $[a, b]$ במקרה שלנו $[-1, 1]$ אז צריך להגדיר $Y_i = \frac{(X_i-a)}{b-a}$.
לכן נגדיר $Y_i = \frac{(X_i+1)}{2}$. ויהא משתנה מקרי $Y = \Sigma_{i=1}^{n}Y_i$. נשים לב ש $Y_i \sim U(\{0, \frac{1}{2}, 1\})$ לכל $1 \le i \le n$.
מאחר ו-Y_i מתפלג באופן אחיד אז באופן ישיר נקבל $E(Y_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$. נרצה למצוא את היחס בין המשתנה המקרי בשאלה לבין המשתנה המקרי החדש שהגדרנו, תחילה נבודד ונקבל: $X_i = 2Y_i - 1$.
נמצא את היחס: $S_n = \Sigma_{i=1}^{n}X_i = \Sigma_{i=1}^{n}(2Y_i - 1) = 2\Sigma_{i=1}^{n}Y_i - n = 2Y - n$
נחשב $E(Y)$: $E(Y) = \Sigma_{i=1}^{n}E(Y_i) = \Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ כעת נביא לצורה של צ'רנוף יחד עם המשתנה המקרי החדש
בהתאם: $\Pr\left(\left|S_n\right| > 2\sqrt{n}\right) = \Pr\left(|2Y - n| > 2\sqrt{n}\right) = \Pr\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| > \sqrt{n}\right) \le \Pr\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| \ge \sqrt{n}\right)$
ולכן לפי צ'רנוף (1) נקבל: $\Pr\left(\left|S_n\right| > 2\sqrt{n}\right) \le \Pr\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| \ge \sqrt{n}\right) \le 2e^{-\frac{2n}{n}} = 2e^{-2}$

פתרון ב': נשים לב ש: $E(X_i) = \frac{1}{3}(-1 + 0 + 1) = 0$ לכל i.
$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{(1+0+1)}{3} - 0^2 = \frac{2}{3}$ לכל i. ומכאן:
$P(|S_n| > 2\sqrt{n}) = 1 - P(-2\sqrt{n} \le S_n \le 2\sqrt{n}) = 1 - P(\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{2/3}\sqrt{n}} \le \frac{S_n}{\sqrt{2/3}\sqrt{n}} \le \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2/3}\sqrt{n}}) =$
$= 1 - P(-\sqrt{6} \le Z \le \sqrt{6}) \approx 1 - (\Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-\sqrt{6})) = 1 - \left(\Phi(\sqrt{6}) - (1 - \Phi(\sqrt{6}))\right) =$
$= 1 - \left(\Phi(\sqrt{6}) - 1 + \Phi(\sqrt{6})\right) = 2 - 2\Phi(\sqrt{6}) = 2(1 - \Phi(\sqrt{6}))$

תהי F משפחה של וקטורים בינאריים באורך n. כל וקטור $\left(x_1, ..., x_n\right) \in F$ מקיים: $\Sigma_{i=1}^{n}x_i \ge 2n/3$ (אז נאמר שהוקטור $\left(x_1 .. x_n\right)$ הוא גדול) או $\Sigma_{i=1}^{n}x_i \le n/3$ (אז נאמר שהוקטור $\left(x_1,.. x_n\right)$ הוא קטן).
כתבו אלגוריתם המקיים את כל התכונות הבאות:
1. קלט: וקטור $\left(x_1, ..., x_n\right) \in F$ כלשהו.
2. פלט: "$\left(x_1, ..., x_n\right)$ קטן" או "$\left(x_1, ..., x_n\right)$ גדול".
3. לכל קלט, הפלט של האלגוריתם צריך להיות נכון בהסתברות $1 - 2^{-100}$ לפחות.
4. זמן הריצה של האלגוריתם קבוע (כלומר לא תלוי ב-n).

פתרון: <u>האלגוריתם</u>: קלט: וקטור $(x_1, x_2,..., x_n) \in F$.
- בחר באופן אקראי אחיד ובלתי תלוי עם החזרה t אינדקסים מתוך: $\{1, 2..., n\}$.
- סמן את הערכים שנבחרו ב: $a_1, a_2,..., a_t$.
- אם $\Sigma_{i=1}^{t}a_i \ge \frac{t}{2}$ אז החזר שהוקטור "גדול" ואחרת החזר שהוקטור "קטן".

<u>זמן ריצה</u>: מבצעים t דגימות, סוכמים אותן ומחזירים תשובה - אין תלות ב n ולכן הסיבוכיות היא: $O(1)$.
<u>הסתברות</u>: נסמן ב X_i את תוצאת הדגימה ה i. נסמן ב $X = \Sigma_{i=1}^{t}X_i$ את מספר האחדות שדגמנו.
<u>אם הוקטור גדול</u>: $E(X_i) = P(X_i = 1) \ge \frac{2n/3}{n} = \frac{2}{3}$. וגם $E(X) = \Sigma_{i=1}^{t}E(X_i) \ge \Sigma_{i=1}^{t}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}t$
ננתח כעת את ההסתברות לטעות: $P(X < \frac{t}{2})$ המשתנים: X_i הם ב"ת (הדגימות הן ב"ת) וטווח הערכים הם: $\{0, 1\}$. X הוא סכום המשתנים הללו ולכן ניתן להשתמש בחסם צ'רנוף.
נשתמש בנוסחה עבור: $P(X \le E(X) - a)$ ומכאן: $\frac{2}{3}t - a = \frac{t}{2}$ ומכאן: $a = \frac{t}{6}$.
ומכאן: $P(X < \frac{t}{2}) \le P(X \le \frac{t}{2}) \le P(X \le E(X) - \frac{t}{6}) \le e^{-\frac{2(t/6)^2}{t}} = e^{-\frac{t}{18}} \le 2^{-100}$.
<u>*אם הוקטור קטן*</u>: באופן אנלוגי נראה שאם "וקטור קטן", אז ההסתברות שהאלגוריתם פולט בטעות את "וקטור גדול" היא לכל היותר 2^{-100}. אנו מסיקים כי עבור כל קלט, ההסתברות שהפלטים של האלגוריתם נכונים היא לפחות $1 - 2^{-100}$ כנדרש.

יהיו $4 \le k \le n$ וכן $m < 2^{k-3}$ מספרים טבעיים. תהי $\left\{A_1, ..., A_m\right\}$ משפחה של תת קבוצות של $\{1, ..., n\}$ כך ש- $\left|A_i\right| = k$ לכל $1 \le i \le m$. הוכיחו שקיימת צביעה של איברי $\{1, ..., n\}$ בארבעה צבעים כך ש- A_i תכיל איברים משלושה צבעים שונים לפחות, לכל $1 \le i \le m$.

פתרון: נשתמש בשיטה ההסתברותית: נצבע את האיברים $\{1, 2,..., n\}$ ב 4 צבעים באופן אקראי אחיד ובלתי תלוי.
נגדיר X_i = אינדיקטור האומר האם A_i צבועה כולה בצבע אחד או ב 2 צבעים. נגדיר: $X = \Sigma_{i=1}^{m}X_i$. נראה ש: $P(X = 0) > 0$. ומכן קיים סיכוי לצביעה כנ"ל ולכן קיימת צביעה כזאת. למעשה נראה: $P(X \ge 1) < 1$.
נחשב תוחלת: $E(X_i) = P(A_i\ in\ one\ color) + P(A_i\ in\ two\ colors) =$
$= 4\cdot(\frac{1}{4})^k + \binom{4}{2}\cdot[(\frac{2}{4})^k - 2\cdot(\frac{1}{4})^k] = 6\cdot(\frac{1}{2})^k - 8\cdot(\frac{1}{4})^k$
ומכאן: $E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{m}X_i) = \Sigma_{i=1}^{m}E(X_i) = m\cdot(6\cdot(\frac{1}{2})^k - 8\cdot(\frac{1}{4})^k)$.
$P(X \ge 1) \le E(X) = m(6(\frac{1}{2})^k - 8(\frac{1}{4})^k) < 2^{k-3}(6(\frac{1}{2})^k - 8(\frac{1}{4})^k) = \frac{6}{8} - \frac{8}{2^{k+3}} < \frac{6}{8} < 1$

יהי $G \sim G(n,\ ln(n)/n)$ גרף מקרי. הוכיחו שההסתברות שקיימות שתי קבוצות זרות של קודקודים של G מגודל $n/100 \le t \le n$ כל אחת ללא אף קשת של G ביניהן שואפת ל-0 כאשר n שואף לאינסוף.

פתרון: עבור $X, Y \subseteq V$, 2 קבוצות קודקודים זרות כלשהו בגרף בגודל t כל אחת.
ההסתברות שאין אף צלע ביניהן היא: $(1 - \frac{ln(n)}{n})^{t^2}$. נשתמש בנוסחא: $(1 - x)^k \le e^{-xk}$. $\binom{n}{k} \le (\frac{en}{k})^k$.
ההסתברות שקיימות 2 קבוצות כנ"ל היא $P(\exists X, Y....) \le \binom{n}{t}\cdot\binom{n-t}{t}\cdot(1 - \frac{ln(n)}{n})^{t^2} \le \binom{n}{t}\cdot\binom{n}{t}\cdot e^{-\frac{t^2ln(n)}{n}}$
$\le (\frac{en}{t})^{2t}\cdot e^{-\frac{t^2ln(n)}{n}} \le (\frac{en}{n/100})^{2n}\cdot e^{-\frac{(n/100)^2ln(n)}{n}} \le (100e)^{2n}\cdot e^{-\frac{nln(n)}{100^2}} \le e^{12n-\frac{nln(n)}{100^2}} \to 0$
כי $\frac{nln(n)}{100^2} = \Theta(nln(n))$, $12n = \Theta(n)$ ולכן: $12n << \frac{nln(n)}{100^2}$.

יהי $G \sim G(n,\ n^{-3/2})$ גרף מקרי. הוכיחו שההסתברות ש-G יער (כלומר גרף חסר מעגלים) שואפת ל-1 כאשר n שואף לאינסוף.

פתרון: נגדיר: X_i - מספר המעגלים באורך i. לכל $3 \le i \le n$. לכל i נגדיר: Y_A^i להיות אינדיקטור האם הקבוצה A של קודקודים בגודל i מהווה מעגל. עבור קבוצה A של i קודקודים. ההסתברות שהיא מעגל היא לכל היותר: $i!\cdot(n^{-3/2})^i$. מכאן: $E(Y_A^i) \le i!\cdot(n^{-3/2})^i$. מכאן: $X_i = \Sigma_{|A|=i}Y_A^i$.
ולכן: $E(X_i) = \Sigma_{|A|=i}E(Y_A^i) \le \binom{n}{i}\cdot i!\cdot(n^{-3/2})^i$. לבסוף נגדיר: $X = \Sigma_{i=3}^{n}X_i$ - מספר המעגלים הכולל בגרף.
מכאן: $E(X) = \Sigma_{i=3}^{n}E(X_i) \le \Sigma_{i=3}^{n}\binom{n}{i}\cdot i!\cdot(n^{-3/2})^i \le \Sigma_{i=3}^{n}(\frac{en}{i})^i\cdot i^i\cdot(n^{-3/2})^i \le$
$\le \Sigma_{i=3}^{n}(en)^i\cdot(n^{-3/2})^i = \Sigma_{i=3}^{n}\frac{e^in^i}{n^{3/2i}} = \Sigma_{i=3}^{n}\frac{e^i}{n^{1/2i}} = \Sigma_{i=3}^{n}(\frac{e}{\sqrt{n}})^i \le \Sigma_{i=3}^{n}(\frac{e}{\sqrt{n}})^3 = \frac{e^3\cdot n}{n^{3/2}} = \frac{e^3}{\sqrt{n}} \to 0$
ולכן לפי חסם מרקוב: $P(X \ge 1) \le E(X) \to 0$.
ולכן: $P(X = 0) \to 1$. כלומר בהסתברות שואפת ל 1 אין מעגלים בגרף.

יהי $X \sim U([0, 1])$ וגם יהי $Y = e^X$. חשבו את פונקציית ההסתברות המצטברת ופונקציית הצפיפות של Y.

פתרון: מאחר ו- $X \sim U([0, 1])$ אז נובע ש: אם $0 \le x \le 1$ אז $F_X(x) = \Pr(X \le x) = \frac{x-0}{1-0} = x$.
אז לכל $y \in [e^0, e^1] = [1, e]$ יש לנו:
$$F_Y(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr\left(e^X \le y\right) = \Pr(X \le \ln(y)) = F_X(\ln(y)) = \ln(y)$$
לכן פונקציית ההסתברות המצטברת של Y היא: אם $1 \le y \le e$ אז $F_Y(y) = \ln(y)$כעת, מאחר ומצאנו את $F_Y(y)$ אז אפשר למצוא את פונקציית הצפיפות f_Y על ידי גזירה: $f_Y(y) = F'_Y(y) = (\ln(y))' = \frac{1}{y}$